

ตรีโกณมิติ ม.5

การวัดมุม

หน่วยในการวัดมุมที่น้อง ๆ รู้จักกันแล้วจากการเรียนบทอัตราส่วนตรีโกณมิติในระดับม.3 คือ องศา (degree) เขียนแทนสัญลักษณ์ $^{\circ}$ เช่น $0^{\circ}, 60^{\circ}, 135^{\circ}, 360^{\circ}$ เป็นต้น

หน่วยวัดมุมที่สำคัญอีกหน่วยหนึ่ง คือ เรเดียน (radian)

มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมรัศมียาว r หน่วย ซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่ยาว a มีขนาดเท่ากับ $\frac{a}{r}$ เรเดียน และถ้าให้ขนาดของมุดังกล่าวเป็น θ เรเดียน จะได้ $\theta = \frac{a}{r}$

เนื่องจากมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมที่มีรัศมียาว r หน่วย มีขนาด 2π เรเดียน หรือ 360 องศา ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า

180 องศา เท่ากับ π เรเดียน

เปลี่ยนมุมในหน่วยเรเดียนเป็นองศา

ตัวอย่างที่ 1 มุมที่มีขนาด 60 องศา มีขนาดกี่เรเดียน

แนวคิด ให้น้อง ๆ ทำเหมือนตอนเทียบบัญญัติไตรยางค์ได้เลย

วิธีทำ

จาก 180 องศา เท่ากับ π เรเดียน

จะได้ 16 องศา เท่ากับ $\frac{\pi}{180} \times 60 = \frac{\pi}{3}$ เรเดียน

ดังนั้น มุมที่มีขนาด 60 องศา เท่ากับ $\frac{\pi}{3}$ เรเดียน

ตัวอย่างที่ 2 มุมที่มีขนาด $\frac{\pi}{4}$ เรเดียน มีขนาดกี่องศา

แนวคิด แทน π ด้วย 180° ได้เลย

วิธีทำ

จาก 180 องศา เท่ากับ π เรเดียน

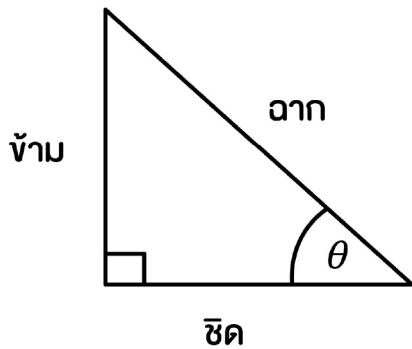
จะได้ $\frac{\pi}{4}$ องศา เท่ากับ $\frac{180}{4} = 45$ องศา

ดังนั้น มุมที่มีขนาด $\frac{\pi}{4}$ เรเดียน เท่ากับ 45 องศา

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ความรู้เดิมในระดับชั้น ม.3 ที่จะถูกนำมาต่อยอดในระดับชั้นนี้คือ อัตราส่วนตรีโกณมิติ กล่าวถึงอัตราส่วนของความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก 6 แบบ ดังนี้

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



$$\sin \theta = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}}$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} \text{ เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

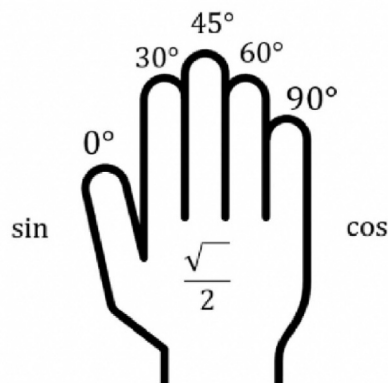
$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \text{ เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} \text{ เมื่อ } \tan \theta \neq 0$$

ตารางแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง θ บางจำนวน เมื่อ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

θ		$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
เรเดียน	องศา			
0	0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	30	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	45	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	60	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90	1	0	ไม่นิยาม

เทคนิคการจำโดยใช้มือซ้าย



การหา $\sin 30^\circ$ และ $\cos 45^\circ$ โดยใช้เทคนิคมือซ้าย

การหา $\sin 30^\circ$

1. ให้พับนิ้วชี้มือซ้ายลง
2. พิจารณาว่าด้านซ้ายของนิ้วที่พับลงมีนิ้วอยู่กี่นิ้ว (จะได้อะไรมี 1 นิ้ว)
3. นำจำนวนที่ได้มาใส่ใน $\sqrt{\quad}$ (กรณีที่ 2)
4. จะได้ว่า $\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$

การหา $\cos 45^\circ$

1. ให้พับนิ้วกลางมือซ้ายลง
2. พิจารณาว่าด้านขวาของนิ้วที่พับลงมีนิ้วอยู่กี่นิ้ว (จะได้อะไรมี 2 นิ้ว)
3. นำจำนวนที่ได้มาใส่ใน $\sqrt{\quad}$ (กรณีที่ 2)
4. จะได้ว่า $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

โคฟังก์ชัน (co-function)

ก่อนจะพูดถึงสูตรเรามาสังเกตจากชื่อเต็มกันก่อน

(sin) sine → (cos) **cosine**

(tan) tangent → (cot) **cotangent**

(sec) secant → (cosec) **cosecant**

จะเห็นว่าชื่อเต็มของ cos คือ cosine ซึ่งคล้ายกับ sine แต่มีการเติม co- เพิ่มเข้ามา ดังนั้น sin กับ cos จึงถือว่าเป็น “โคฟังก์ชัน” กัน ในทำนองเดียวกัน tan กับ cot และ sec กับ cosec ก็เป็นโคฟังก์ชันซึ่งกันและกัน

สูตรโคฟังก์ชันเป็นสูตรที่กล่าวถึงมุม A และมุม B ที่มีผลรวมได้ 90° แล้วว่า “โคฟังก์ชัน” ของมุม A จะเท่ากับมุม B

โคฟังก์ชัน

$$\sin(90^\circ - A) = \cos A$$

$$\cos(90^\circ - A) = \sin A$$

$$\tan(90^\circ - A) = \cot A$$

$$\cot(90^\circ - A) = \tan A$$

$$\sec(90^\circ - A) = \operatorname{cosec} A$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ - A) = \sec A$$

$$\text{เช่น } \sin 30^\circ = \cos 60^\circ$$

$$\tan 25^\circ = \cot 65^\circ$$

$$\operatorname{cosec} 30^\circ = \sec 60^\circ$$

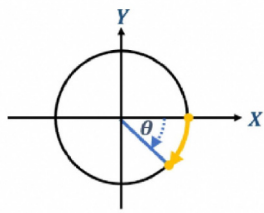
ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมลบ

เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ จากจุด $(1, 0)$ วัดระยะไปตามส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยให้ยาว $|\theta|$ หน่วย จะถึงจุด (x, y) ซึ่งอยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย โดยมีข้อตกลงสำหรับทิศทางการวัดดังนี้

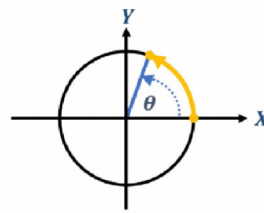
เมื่อ $\theta > 0$ (เป็นบวก) จะวัดไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

เมื่อ $\theta < 0$ (เป็นลบ) จะวัดไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ดังรูป

$$\theta = -\frac{\pi}{4}$$



$$\theta = \frac{\pi}{3}$$



สูตรของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ควรรู้

เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$1 + \tan^2 A = \sec^2 A \quad \text{เมื่อ } \cos A \neq 0$$

$$1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A \quad \text{เมื่อ } \sin A \neq 0$$

สูตรผลบวก - ผลต่างมุม

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \quad \text{เมื่อ } \tan A \tan B \neq 1$$

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B} \quad \text{เมื่อ } \tan A \tan B \neq -1$$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $\sin A = \frac{4}{5}, 0 < A < \frac{\pi}{2}$ และ

$$\cos B = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{\pi}{2} < B < 0 \text{ จงหา } \sin(A + B)$$

แนวคิด หา $\cos A$ และ $\sin B$ จากสูตรเอกลักษณ์ตรีโกณมิติก่อน
แล้วแทนค่าในสูตรผลบวกมุมเพื่อหา $\sin(A + B)$

วิธีทำ

$$\text{จาก } \sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\text{จะได้ว่า } \cos^2 A = 1 - \sin^2 A = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

$$\text{เนื่องจาก } 0 < A < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ดังนั้น } \cos A = \frac{3}{5}$$

$$\text{จาก } \sin^2 B + \cos^2 B = 1$$

$$\text{จะได้ว่า } \sin^2 B = 1 - \cos^2 B = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\text{เนื่องจาก } -\frac{\pi}{2} < B < 0$$

$$\text{ดังนั้น } \sin B = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{พิจารณา } \sin(A + B)$$

$$\text{จาก } \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } \sin(A + B) &= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \\ &= \frac{4\sqrt{5}}{25} - \frac{6\sqrt{5}}{25} \\ &= -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \sin(A + B) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

ตัวอย่างที่ 4 จะหาค่าของ $2\cos 15^\circ \sin 75^\circ$

วิธีทำ

$$\text{จาก } 2\cos A \sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B)$$

$$\text{จะได้ } 2\cos 15^\circ \sin 75^\circ$$

$$= \sin(15^\circ + 75^\circ) - \sin(15^\circ - 75^\circ)$$

$$= \sin 90^\circ - \sin(-60^\circ)$$

$$= 1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ดังนั้น } 2\cos 15^\circ \sin 75^\circ = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$$

สูตรแปลงผลบวกเป็นผลคูณ

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

จะเห็นว่าไม่มีสูตรแปลงผลบวกระหว่าง $\sin$ กับ $\cos$ ดังนั้นถ้าต้อง อยากรู้สูตร สามารถใช้โคฟังก์ชันแปลงจาก $\sin$ ให้เป็น $\cos$ หรือจาก $\cos$ เป็น $\sin$ ได้ ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 5 จะหาค่าของ $\sin 75^\circ + \cos 75^\circ$

แนวคิด พิจารณาส่งที่โจทย์กำหนดให้ พบว่าน่าจะใช้สูตรแปลงผลบวกเป็นผลคูณได้

ไม่มี $\sin A + \cos A$ โคฟังก์ชันในการเปลี่ยนก่อน ให้เป็น $\cos A + \cos B$ ก่อนแล้วจึงใช้สูตร

วิธีทำ จาก $\sin A = \cos(90^\circ - A)$

จะได้ $\sin 75^\circ = \cos(90^\circ - 75^\circ) = \cos 15^\circ$

จาก $\cos A + \cos B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right)$

จะได้ $\sin 75^\circ + \cos 75^\circ = \cos 15^\circ + \cos 75^\circ$

$$= \cos 75^\circ + \cos 15^\circ$$

$$= 2 \cos \left(\frac{75^\circ + 15^\circ}{2} \right) \cos \left(\frac{75^\circ - 15^\circ}{2} \right)$$

$$= 2 \cos 45^\circ \cos 30^\circ$$

$$= 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2}$$

ดังนั้น $\sin 75^\circ + \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2}$

สูตรมุมสองเท่า

สูตรมุมสองเท่า

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\begin{aligned}\cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A \\ &= 1 - 2\sin^2 A \\ &= 2\cos^2 A - 1\end{aligned}$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A} \text{ เมื่อ } \tan^2 A \neq 1$$



ตัวอย่างที่ 6 กำหนดให้ $\cos \theta = \frac{4}{5}$ และ $\sin \theta < 0$ จงหาค่าของ $\tan 2\theta$

แนวคิด ใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติมาช่วยหาค่าของ $\sin \theta$ เพื่อให้ได้ $\tan 2\theta$ ต่อไปจากนั้นสามารถใช้สูตรมุมสองเท่าเพื่อหา $\tan 2\theta$ ได้

วิธีทำ

เนื่องจาก $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

จะได้ว่า $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$

ดังนั้น $\sin \theta = -\frac{3}{5}$

จาก $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

จะได้ว่า $\tan \theta = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \left(-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{4}\right) = -\frac{3}{4}$

จาก $\tan 2\theta = \frac{2\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$

จะได้ว่า $\tan 2\theta = \frac{2\left(-\frac{3}{4}\right)}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{-\frac{3}{2}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}} = \left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{16}{7}\right) = \left(-\frac{24}{7}\right)$

ดังนั้น $\tan 2\theta = -\frac{24}{7}$

สมการตรีโกณมิติ

การแก้สมการตรีโกณมิติทำได้ในทำนองเดียวกันกับการแก้สมการทั่ว ๆ ไป แต่ต้องใช้ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติเพื่อหาคำตอบของสมการ

ถ้าโจทย์ไม่กำหนดให้คำตอบต้องอยู่ในช่วงใดช่วงหนึ่ง เราควรตอบคำตอบในรูปทั่วไป เพราะว่าฟังก์ชันตรีโกณมิติไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 ดังนั้นค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมใด ๆ อาจซ้ำกันได้

ตัวอย่างที่ 7 จงแก้สมการ $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$ โดย

1. $0 \leq \theta \leq 2\pi$
2. ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

แนวคิด สามารถใช้ความรู้เรื่องเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ และสูตรมุมสองเท่ามาช่วยแก้สมการได้ และอย่าลืมตรวจคำตอบด้วย

วิธีทำ

1. จาก $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$

จะได้ $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = (\sqrt{2})^2$

$$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 2$$

$$1 + 2\sin\theta\cos\theta = 2$$

$$2\sin\theta\cos\theta = 1$$

$$\sin 2\theta = 1$$

$$2\theta = \frac{\pi}{2} \text{ หรือ } \frac{5\pi}{2}$$

จะได้ $\theta = \frac{\pi}{4}$ หรือ $\theta = \frac{5\pi}{4}$ เมื่อ $0 \leq \theta \leq 2\pi$

ตรวจคำตอบ

1. แทน $\theta = \frac{\pi}{4}$ ในสมการ $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$

จะได้ $\sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ เป็นจริง

2. แทน $\theta = \frac{5\pi}{4}$ ในสมการ $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$

จะได้ $\sin \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$ เป็นเท็จ

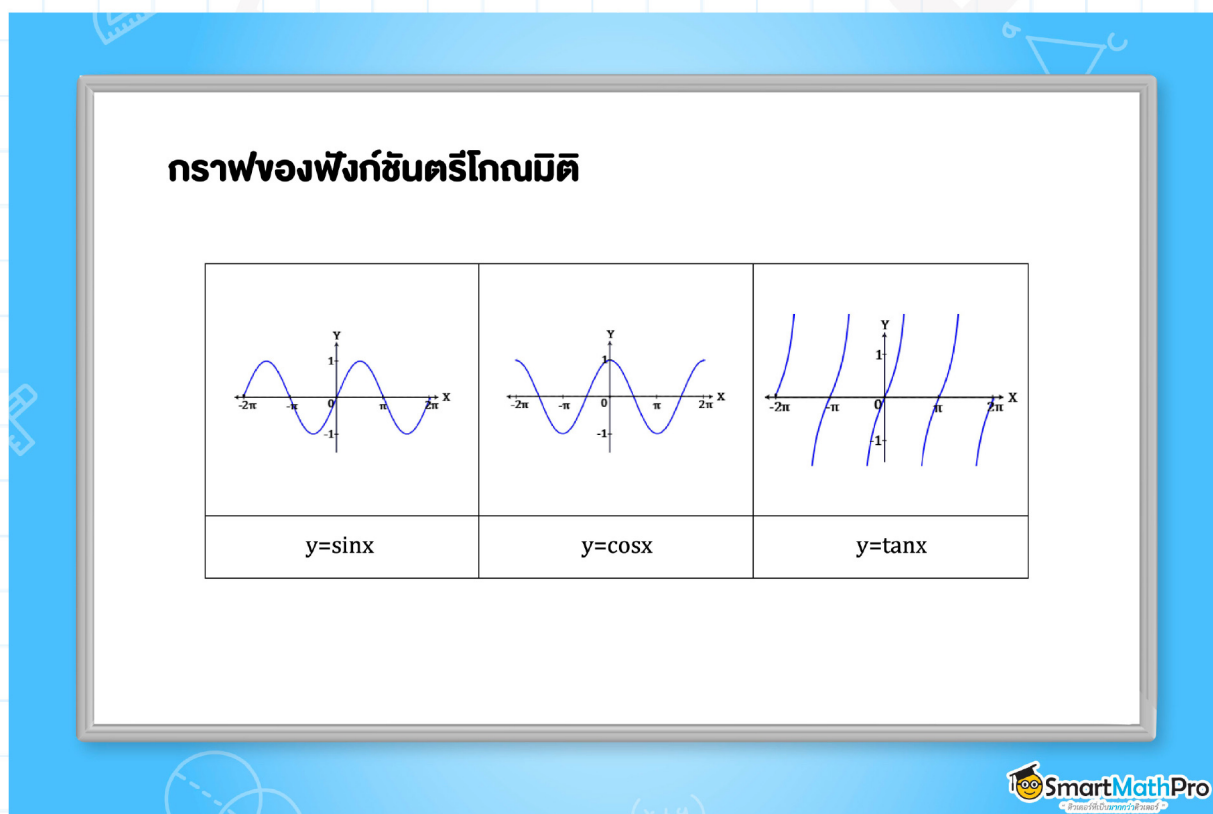
ดังนั้น $\theta = \frac{\pi}{4}$

2. คำตอบทั่วไปของสมการ คือ $2n\pi + \frac{\pi}{4}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

หมายเหตุ : หลังจากหาคำตอบได้แล้ว เราใช้บวก $2n\pi$ เพื่อสร้างคำตอบทั่วไปได้

กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

วิชาฟิสิกส์นำความรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติมาจำลองรูปแบบคลื่นต่าง ๆ ที่เกิดขึ้น
ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดของจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยกับกราฟของ $y = \sin x$
และกราฟของ $y = \cos x$ เป็นดังนี้



กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็น **ฟังก์ชันที่เป็นคาบ (periodic function)** หมายความว่าเราสามารถแบ่งแกน x เป็นช่วงย่อย (subinterval) โดยที่ความยาวของแต่ละช่วงย่อยเท่ากัน และกราฟในช่วงย่อยมีลักษณะเหมือนกัน

ความยาวของช่วงย่อยที่สั้นที่สุดเรียกว่า **คาบ (period)** ของฟังก์ชัน และสำหรับฟังก์ชันที่เป็นคาบซึ่งมีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนั้นว่า **แอมพลิจูด (amplitude)**

**แอมพลิจูดและคาบ โดเมนและเรนจ์กราฟของ $y = A\sin(Nx)$
และ $y = A\cos(Nx)$ ซึ่งเป็นกรณีทั่วไป ดังนี้ โดย $N > 0$**

ฟังก์ชัน	โดเมน	คาบ	แอมพลิจูด	คาบ
$y = A\sin(Nx)$	$\mathbb{R}$	$\frac{2\pi}{N}$	$ A $	$[- A , A]$
$y = A\cos(Nx)$	$\mathbb{R}$	$\frac{2\pi}{N}$	$ A $	$[- A , A]$

ตัวอย่างที่ 8 จงหาคาบ แอมพลิจูด โดเมน และเรนจ์ของฟังก์ชัน $y = 3\sin 2x$

วิธีทำ

จาก $y = A\sin 2x$ และ $y = 3\sin 2x$

จะได้ $A = 3$ และ $N = 2$

1. พิจารณาคาบฟังก์ชัน

จากคาบ คือ $\frac{2\pi}{N}$

ดังนั้น $\frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

2. พิจารณาคาบฟังก์ชัน

จาก แอมพลิจูด คือ $|A|$

ดังนั้น $|A| = |3| = 3$

3. พิจารณาโดเมนของฟังก์ชัน

จะได้ว่าโดเมนของฟังก์ชัน คือ $\mathbb{R}$

4. พิจารณาเรนจ์ของฟังก์ชัน

จาก เรนจ์ คือ $[-|A|, |A|]$

จะได้ $[-|A|, |A|] = [-3, 3]$

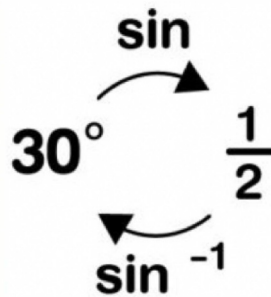
ดังนั้น คาบ คือ π , แอมพลิจูด คือ 3, โดเมน คือ $\mathbb{R}$ และเรนจ์ คือ $[-3, 3]$

ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

การหาตัวผกผันของฟังก์ชันทำได้โดยการสลับที่ระหว่างสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของฟังก์ชัน โดยฟังก์ชัน 1-1 เท่านั้นที่มีตัวผกผันของฟังก์ชัน

จะขอยกตัวอย่างเนื่องจากที่ผ่านมาเรากล่าวถึง $\sin 30^\circ$ มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}$ ซึ่งเป็นค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ตัวผกผันจะกล่าวถึงมุม เช่น มุมใดที่ทำให้ค่าของ $\sin \theta$ มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}$

ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ



ฟังก์ชัน $\arcsin$, $\arccos$, $\arctan$ จะเป็นตัวผกผันของฟังก์ชัน $\sin$, $\cos$, $\tan$ ตามลำดับ

การหาค่าของฟังก์ชันผกผันตรีโกณมิติสามารถทำได้โดยอาศัยฟังก์ชันตรีโกณมิตินั้น ๆ เช่น การหาค่าของฟังก์ชัน $\arcsin x$ โดยที่ $-1 \leq x \leq 1$ ก็คือการหา θ ซึ่งอยู่ในเรนจ์ของฟังก์ชัน $\arcsin$ ที่ทำให้ $\sin \theta = x$

ตัวอย่างเช่น $\arcsin(1)$ คือการหา θ ซึ่ง ที่ทำให้ $\sin \theta = 1$

สรุปได้ว่าฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดโดเมนเพื่อให้มีฟังก์ชันผกผัน มีโดเมนและเรนจ์ดังนี้

โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันผกผัน

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์
$y = \arcsin x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$y = \arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$y = \arctan x$	$\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

ต้องจำว่า $\arcsin, \arctan$ จะได้มุมในช่วง -90° ถึง 90°
 $\arccos$ จะได้มุมในช่วง 0° ถึง 180°

ระวัง ! $\sin(\arcsin x)$ จะเท่ากับ x เมื่อ x อยู่ในเรนจ์ของ $\sin$ เท่านั้น

$\arcsin(\sin x)$ จะเท่ากับ x เมื่อ x อยู่ในเรนจ์ของ $\arcsin$ เท่านั้น

เช่น $\arcsin(\sin 120^\circ) = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = 60^\circ$ ไม่ใช่ 120°

ตัวอย่างที่ 9 จงหาค่าของ $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

วิธีทำ

$$\text{ให้ } \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \theta$$

$$\text{จะได้ } \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

จากเรนจ์ เนื่องจากในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ มี $-\frac{\pi}{3}$ เพียงค่าเดียวที่ $\sin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{ดังนั้น } \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

$$\text{และ } \cos\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

กฎของโคไซน์และกฎของไซน์

เนื่องจากฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชันของจำนวนจริงหรือขนาดของมุม โดยเราจะนำความรู้มาหาความยาวด้านและขนาดของมุมในหัวข้อนี้ ซึ่งจะกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างด้านและมุมของรูปสามเหลี่ยมและฟังก์ชันตรีโกณมิติ

กฎของโคไซน์

ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c ตามลำดับ จะได้

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2accosB$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcosC$$

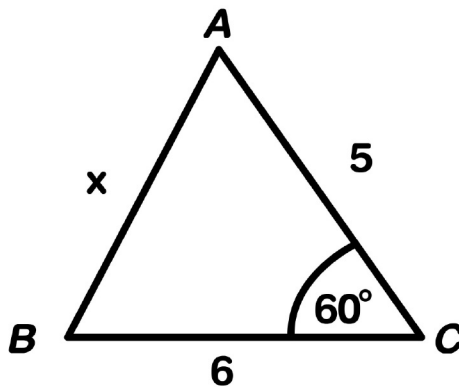
กฎของไซน์

ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c ตามลำดับ จะได้

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

ตัวอย่างที่ 10

จากรูป จงหาค่าของ x และ $\sin A$



วิธีทำ

1) พิจารณาค่าของ x

จากกฎของโคไซน์ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

จะได้

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$x^2 = 6^2 + 5^2 - 2(6)(5)\cos 60^\circ$$

$$x^2 = 36 + 25 - 60\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$x^2 = 31$$

$$x = \sqrt{31}, -\sqrt{31}$$

เนื่องจาก x เป็นความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยม

ดังนั้น $x = \sqrt{31}$ หน่วย

2) พิจารณาค่าของ $\sin A$

จากกฎของไซน์ $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$

จะได้

$$\frac{\sin A}{6} = \frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{31}}$$

$$\sin A = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{31}} \times 6$$

$$\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{31}} \times 6$$

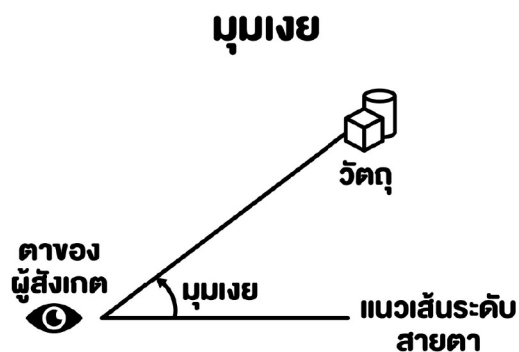
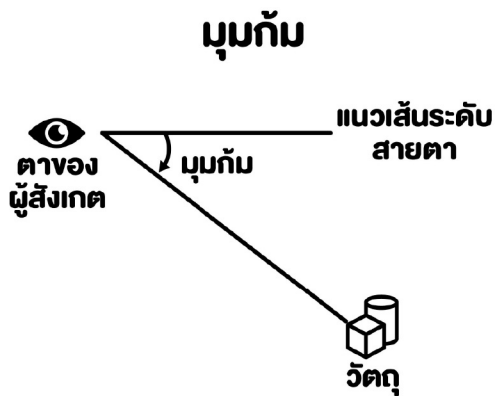
$$\sin A = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{31}}$$

$$\text{ดังนั้น } \sin A = \frac{3\sqrt{93}}{31}$$

การหาระยะทางและความสูง

เราสามารถใช้ความรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติในการหาระยะทางและความสูง ซึ่งมุมที่เกี่ยวข้องจะใช้คำว่ามุมก้มและมุมเงย ซึ่งเกิดจากแนวระดับสายตา และแนวการมองไปยังวัตถุ มุมก้ม คือมุมที่เกิดจากการมองวัตถุที่อยู่ต่ำกว่าระดับสายตา และมุมเงย คือ มุมที่เกิดจากการมองวัตถุที่อยู่สูงกว่าระดับสายตา

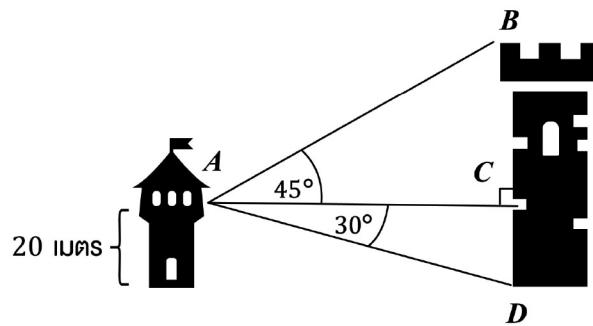
การหาระยะทางและความสูง



ตัวอย่างที่ 11 ยูตะยืนมองจากหน้าต่างห้องพักในปราสาทไปยังหอคอย เขามองยอดหอคอยเป็นมุมเงย 45° และมองฐานหอคอยเป็นมุมก้ม 30° ถ้าหน้าต่างห้องพักอยู่สูงจากพื้นดิน 20 เมตร แล้วหอคอยสูงกี่เมตร

แนวคิด จากโจทย์สามารถวาดภาพประกอบได้ดังนี้ ซึ่งโจทย์ต้องการหาส่วนสูงของหอคอย ดังนั้นต้องหา BC แล้วนำมาบวกกันกับ CD

จากโจทย์ สามารถวาดรูปได้ดังนี้



วิธีทำ

1. พิจารณารูปสามเหลี่ยม ACD

$$\text{จะได้ } \tan 30^\circ = \frac{CD}{AC}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{20}{AC}$$

$$AC = 20\sqrt{3}$$

2. พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABC

$$\text{จะได้ } \tan 45^\circ = \frac{BC}{AC}$$

$$1 = \frac{BC}{20\sqrt{3}}$$

$$BC = 20\sqrt{3}$$

ดังนั้น ส่วนสูงของหอคอย เท่ากับ $BC + DC = 20\sqrt{3} + 20$ เมตร

“เวลาที่ดียิ่งที่สุดในการเริ่มต้น คือ ตอนนี้”

- พี่ปุ่น SmartMathPro -

สนใจติวคณิตศาสตร์เพิ่มเติม online.smartmathpro.com