

ความคล้าย ม.3

ความคล้ายคืออะไร?

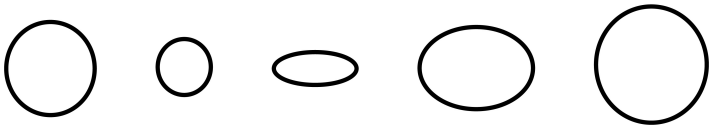
ถ้าห้อง ๆ ลองดูสิ่งของรอบตัว ก็จะเจอว่ามีสิ่งของเครื่องใช้หลายอย่างที่มีรูปร่างคล้ายกัน แต่ต่างกันที่ขนาด เช่น ทีวี กล้องเก็บอาหาร แก้วน้ำ ตู๊กตาแม่ลูกดกหรือมาโตรชก้า เป็นต้น เราจะเรียกสิ่งของที่มีรูปร่างคล้ายกันเหล่านี้ว่าเป็นสิ่งของที่คล้ายกัน

ซึ่งในบทเรียนนี้ไม่ได้กล่าวถึงเพียงรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันเท่านั้น สังเกตได้จากชื่อบทเลย เพราะชื่อบทไม่ได้พูดแค่ว่าเป็นบทเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน แต่พูดมาเป็นคำกว้าง ๆ คือ **“ความคล้าย”** ดังนั้นในบทนี้กล่าวถึงรูปเรขาคณิตที่มีรูปร่างคล้ายกันด้วยเช่นกันนะ ให้นำห้อง ๆ ลองพิจารณารูปของรูปเรขาคณิตต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 พิจารณารูปเรขาคณิตที่คล้ายกัน

พิจารณารูปเรขาคณิตที่คล้ายกัน

1)



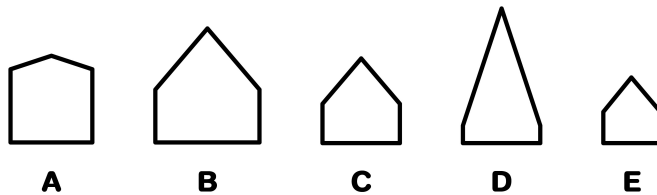
A B C D E

SmartMathPro

จะเห็นว่ารูป A, B และ E เป็นรูปวงกลมที่มีขนาดต่างกัน แต่รูป C และ D เป็นรูปวงรีที่มีรูปร่างและขนาดต่างกัน

พิจารณารูปเรขาคณิตที่คล้ายกัน

2)



จะเห็นว่า รูป B, C และ E เป็นรูปห้าเหลี่ยมที่มีลักษณะคล้ายกันแต่มีขนาดต่างกัน แต่รูป A และ D เป็นรูปห้าเหลี่ยมที่มีรูปร่างและขนาดต่างกัน ดังนั้นรูป B, C และ E เป็นรูปเรขาคณิตที่คล้ายกัน

เราจึงสรุปได้ว่า รูปเรขาคณิตสองรูปเป็นรูปที่คล้ายกัน เมื่อรูปเรขาคณิตทั้งสองนั้นมีรูปร่างเหมือนกัน โดยรูปเรขาคณิตที่คล้ายกันอาจมีขนาดเท่ากันหรือแตกต่างกันก็ได้

สัญลักษณ์

รูปเรขาคณิต A และรูปเรขาคณิต B เป็นรูปที่คล้ายกัน จะเขียนแทนว่า
รูปเรขาคณิต A ~ รูปเรขาคณิต B

สมบัติความคล้าย

- สมบัติสะท้อน:

รูปเรขาคณิต A ~ รูปเรขาคณิต A

- สมบัติสมมาตร:

ถ้ารูปเรขาคณิต A ~ รูปเรขาคณิต B

ถ้ารูปเรขาคณิต B ~ รูปเรขาคณิต A

- สมบัติถ่ายทอด:

ถ้ารูปเรขาคณิต A ~ รูปเรขาคณิต B

และรูปเรขาคณิต B ~ รูปเรขาคณิต C

แล้วรูปเรขาคณิต A ~ รูปเรขาคณิต C

บทนิยาม

รูปหลายเหลี่ยมสองรูปคล้ายกัน ก็ต่อเมื่อ รูปหลายเหลี่ยมสองรูปนั้นมี

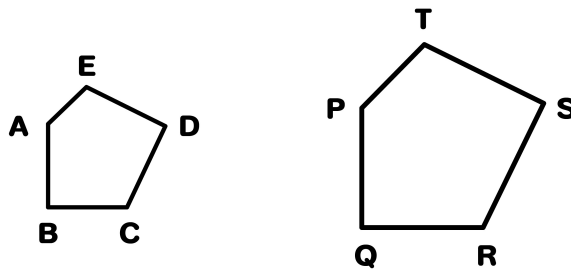
1. ขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ ๆ ทุกคู่

และ

2. อัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่สมนัยกันทุกคู่เป็นอัตราส่วนที่เท่ากัน

เราจะเขียนจุดยอดที่สมนัยกันให้อยู่ในลำดับเดียวกัน

เช่น สมมติว่าเรามีรูปห้าเหลี่ยมสองรูปที่คล้ายกัน เป็นรูปด้านล่างนี้



SmartMathPro
"ตัวเตอร์ที่เป็นมากกว่าตัวเตอร์"

ถ้าน้อง ๆ ต้องการเขียนว่ารูปห้าเหลี่ยมทั้งสองคล้ายกัน ให้น้อง ๆ เขียนโดยเรียงลำดับมุมคู่ที่สมนัยกันแล้วเรียงลำดับไปยังมุมที่อยู่ติดกัน (ในทิศทางหรือตามเข็มนาฬิกาก็ได้)

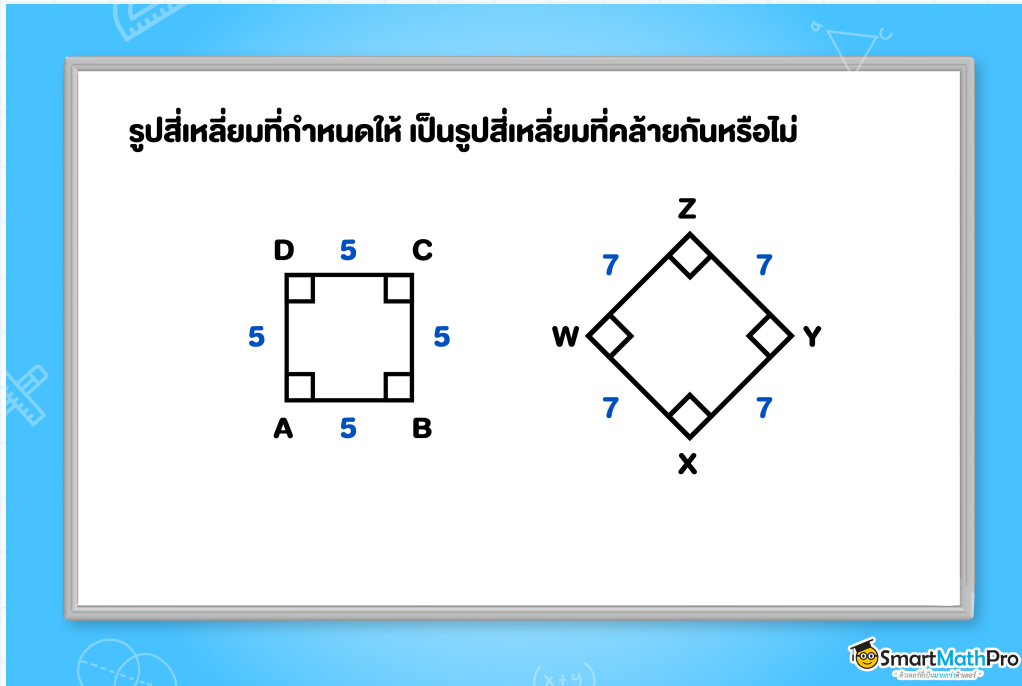
จากรูปเราพอจะเห็นว่า $\hat{A} = \hat{P}$, $\hat{B} = \hat{Q}$, $\hat{C} = \hat{R}$, $\hat{D} = \hat{S}$ และ $\hat{E} = \hat{T}$

เราจะได้ว่ามุมแต่ละคู่ที่มีขนาดเท่ากันเหล่านั้นคือมุมคู่ที่สมนัยกัน

ดังนั้น เราจะเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า รูป $ABCDE \sim$ รูป $PQRST$

เราจะไม่นิยมเขียนเรียงแบบอื่นที่มุมคู่สมนัยกันอยู่ไม่ตรงกัน

ตัวอย่างที่ 2 รูปสี่เหลี่ยมต่อไปนี้ เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่คล้ายกันหรือไม่ เพราะเหตุใด



แนวคิด ใช้บทนิยามทั้ง 2 ข้อมาตรวจสอบว่ารูปสี่เหลี่ยมทั้งสองคล้ายกันหรือไม่

วิธีทำ จากรูป น่อง ๆ จะเห็นว่ารูปสี่เหลี่ยมทั้งสองรูป เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีมุมฉากทั้งหมดเลย
ดังนั้น มุมของรูปสี่เหลี่ยมทั้งสองรูปจะเท่ากันเป็นคู่ ๆ ทุกคู่
พิจารณาอัตราส่วนของความยาวด้านคู่ที่สมนัยกัน

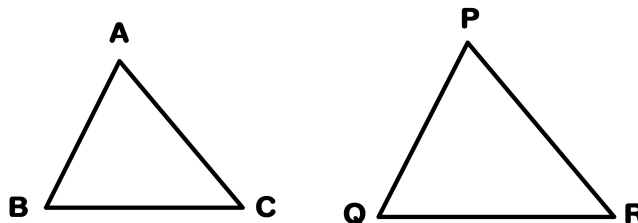
$$\text{จะได้ } \frac{AB}{WX} = \frac{BC}{XY} = \frac{CD}{YZ} = \frac{DA}{ZW} = \frac{5}{7}$$

ดังนั้น $\square ABCD \sim \square WXYZ$

รูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน

จากที่เรารู้จักรูปหลายเหลี่ยมที่คล้ายกันในหัวข้อก่อนหน้า นั้นยังไม่ใช่หัวข้อหลักเลย
หัวข้อหลักของบทความคล้ายอยู่ที่หัวข้อนี้เลย นั่นคือเรื่อง “รูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน”
ข้อสอบก็จะออกเกี่ยวกับหัวข้อนี้เป็นหลัก แถมยังออกสอบเยอะกว่าหัวข้ออื่นมาก ๆ อีกด้วย
ซึ่งในหัวข้อนี้เราจะนำบทนิยามของรูปหลายเหลี่ยมที่คล้ายกันมาช่วยพิจารณาความคล้ายกัน
ของรูปสามเหลี่ยมด้วยนะ เป็นตามตัวอย่างต่อไปนี้เลย

พิจารณารูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน



จากบทนิยามของรูปหลายเหลี่ยมที่คล้ายกัน $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ ก็ต่อเมื่อ

$$1. \hat{A} = \hat{P}, \hat{B} = \hat{Q} \text{ และ } \hat{C} = \hat{R}$$

นั่นคือ ขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ ๆ ทุกคู่

และ

$$2. \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$$

นั่นคือ อัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่สมนัยกันทุกคู่เป็นอัตราส่วนที่เท่ากัน

หลักการพิจารณารูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน

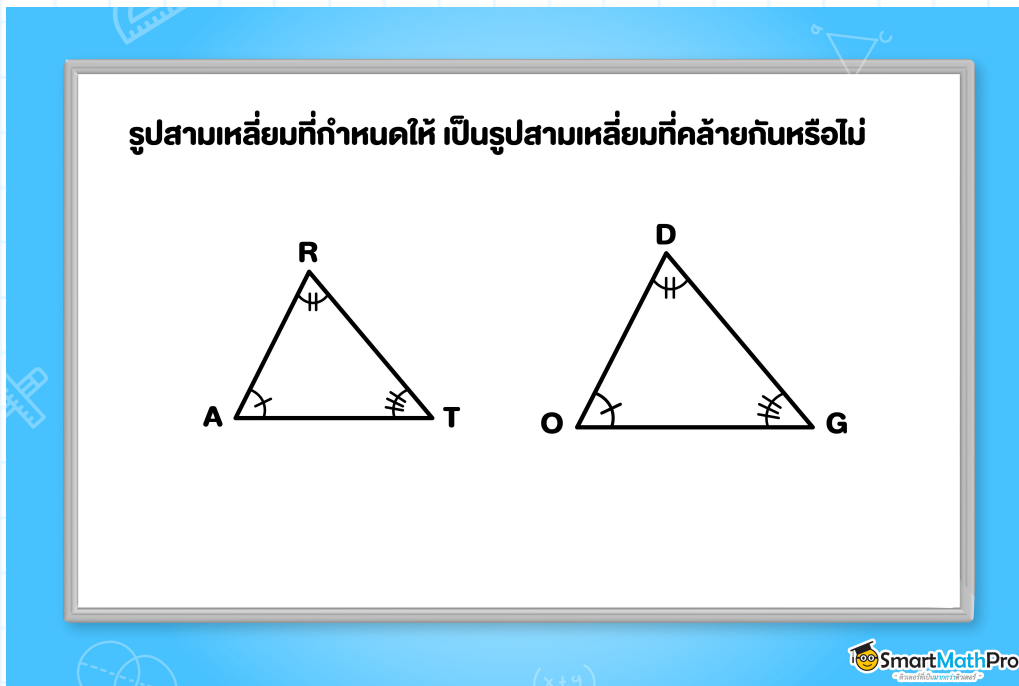
น้อง ๆ บางคนอาจสงสัยว่าแล้วเราต้องพิจารณาทั้งสองข้อตามบทนิยามของรูปหลายเหลี่ยมที่คล้ายกันเลยไหม เพื่อที่จะสรุปว่ารูปสามเหลี่ยมที่เรากำลังพิจารณาอยู่มันคล้ายกันหรือไม่ เวลาเราแก้โจทย์เรามักจะไม่พิจารณาตามบทนิยามจนครบทั้งสองข้อแล้วค่อยสรุปคำตอบนะ เพราะโดยทั่วไป ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ ๆ สามคู่ แล้วอัตราส่วนของความยาวของด้าน คู่ที่สมนัยกันทั้งสามคู่จะเท่ากันตามไปด้วย

นั่นคือ แค่เราพิจารณารูปสามเหลี่ยมสองรูปว่ามีขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ ๆ สามคู่ ก็เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอแล้วที่จะทำให้สรุปได้ว่า รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน โดยที่เราไม่จำเป็นต้องตรวจสอบอัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่สมนัยกันเหมือนรูปหลายเหลี่ยมอื่น ๆ ในทางคณิตศาสตร์ได้ให้บทนิยามของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน ดังนี้

บทนิยาม

รูปสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกัน ก็ต่อเมื่อ รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นมีขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ ๆ สามคู่

ตัวอย่างที่ 3 รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันหรือไม่ เพราะเหตุใด



พิจารณาโดยใช้บทนิยามข้างต้น จะได้ว่า $\triangle RAT \sim \triangle DOG$ เพราะ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันเป็นคู่ ๆ สามคู่

คือ $\hat{R} = \hat{D}$, $\hat{A} = \hat{O}$ และ $\hat{T} = \hat{G}$

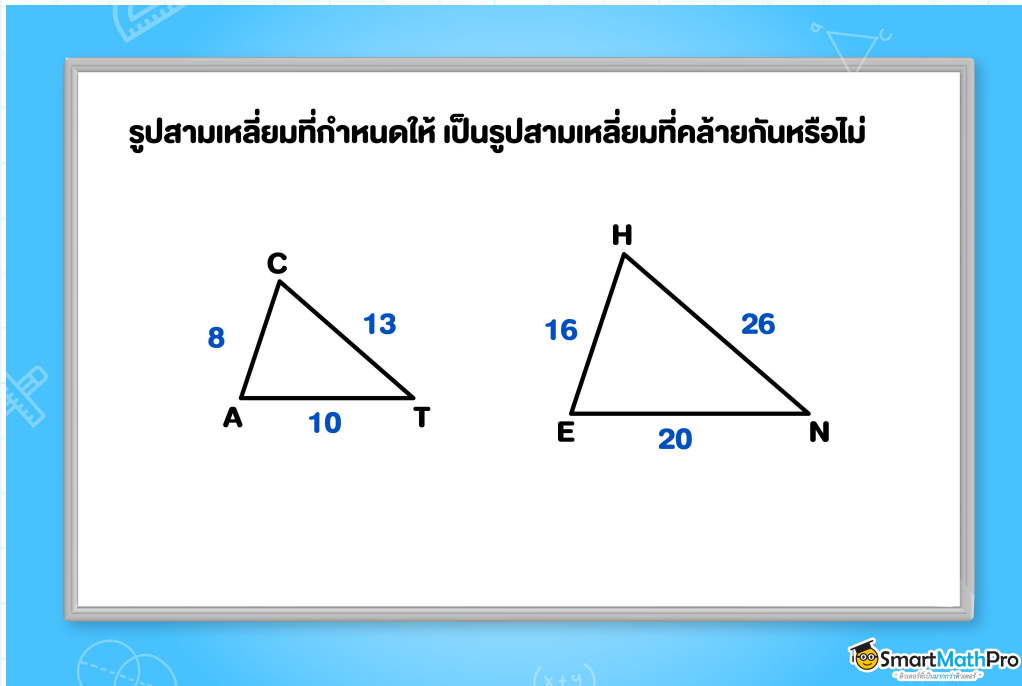
นอกจากบทนิยามข้างต้น ที่กล่าวถึงการที่สามเหลี่ยมจะเป็นสามเหลี่ยมคล้ายได้

ถ้าเราพิจารณาแล้วพบว่ามมุมเท่ากันเป็นคู่ ๆ ทั้งสามคู่แล้ว ยังมีทฤษฎีบทต่อไปนี้ ที่กล่าวถึงอัตราส่วนของด้านคู่ที่สมนัยกันอีกด้วย นั่นคือ

ทฤษฎีบท

ถ้าอัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่สมนัยกันทุกคู่ของรูปสามเหลี่ยมสองรูป เป็นอัตราส่วนที่เท่ากัน แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนี้เป็นรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน

ตัวอย่างที่ 4 รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันหรือไม่ เพราะเหตุใด



พิจารณาโดยใช้ทฤษฎีบทข้างต้น จะได้ว่า

$$\frac{AC}{EH} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{CT}{HN} = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{TA}{NE} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น $\triangle CAT \sim \triangle HEN$

จากบทนิยามและทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน และจากตัวอย่างที่ 3 และ 4 ที่ผ่านมา จะเห็นว่า เราสามารถใช้เพียงบทนิยาม หรือใช้เพียงทฤษฎีบทเพียงอย่างเดียวเพื่อตรวจสอบรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันได้

ดังนั้นต่อจากนี้ ถ้าน้อง ๆ จะทำโจทย์ในบทนี้ต่อไป ให้ใช้เพียงเงื่อนไขเดียว จากสองเงื่อนไข เพื่อพิจารณาได้ว่ารูปสามเหลี่ยมที่โจทย์กำหนดให้คล้ายกันหรือไม่ก็เพียงพอแล้วนะ ซึ่งเงื่อนไขที่น้อง ๆ สามารถเลือกใช้เพื่อตรวจสอบได้ คือ

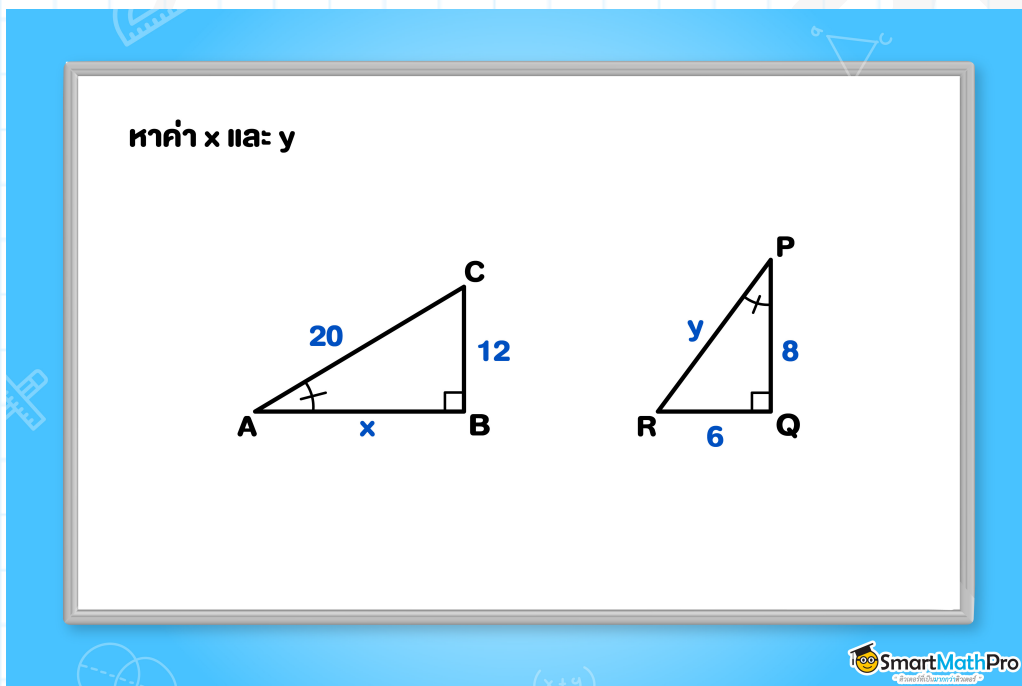
1. รูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปมีขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ๆ ทั้งสามคู่ หรือ
2. อัตราส่วนของความยาวด้านของคู่ที่สมนัยกันทุกคู่ เป็นอัตราส่วนที่เท่ากัน

ถึงตรงนี้ก็คิดว่าน้อง ๆ น่าจะเข้าใจเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันแล้ว เรานำความรู้ที่ได้ในหัวข้อก่อนหน้านี้มาแก้โจทย์ในตัวอย่างต่อไปนี้กัน

แต่ขอเตือนน้อง ๆ หน่อย ว่าทุกครั้ง ก่อนที่เราจะใช้เงื่อนไขข้อใดข้อหนึ่งในการแก้ปัญหาโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน เราต้องตรวจสอบก่อนเสมอว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นคล้ายกันใช้ไหม

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นไม่คล้ายกัน ก็จะไม่สามารถใช้เงื่อนไขเกี่ยวกับอัตราส่วนของความยาวด้านหรือเงื่อนไขเกี่ยวกับมุมคู่ที่สมนัยกันได้เลย

ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของ x และ y



วิธีทำ

ขั้นตอนที่ 1 จะแสดงว่า $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

จากรูป จะได้ว่า $\hat{A} = \hat{P}$ และ $\hat{B} = \hat{Q} = 90^\circ$

พิจารณา $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{A}) = 180^\circ - (90^\circ + \hat{A}) = 90^\circ - \hat{A}$

$\hat{R} = 180^\circ - (\hat{Q} + \hat{P}) = 180^\circ - (90^\circ + \hat{A}) = 90^\circ - \hat{A}$

จะได้ว่า $\hat{C} = \hat{R}$

ดังนั้น $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

ขั้นตอนที่ 2 หาค่าของ x และ y

$$\text{จะได้ว่า } \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$$

$$\frac{x}{8} = \frac{12}{6}$$

$$x = \left(\frac{12}{6}\right)(8) = 16$$

$$\text{จะได้ว่า } \frac{PR}{AC} = \frac{QR}{BC}$$

$$\frac{y}{20} = \frac{6}{12}$$

$$y = \left(\frac{6}{12}\right)(20) = 10$$

ดังนั้น $x = 16$ และ $y = 10$

ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 5 เมื่อรูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ มุมที่เหลืออยู่จะวางเท่ากันเสมอ

ดังนั้นเมื่อน้องทำโจทย์ในบทนี้ เมื่อน้อง ๆ เจอรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมขนาดเท่ากันเป็นคู่ ๆ เพียงสองคู่ ก็สามารถสรุปได้เลยว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นคล้ายกัน

โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยม

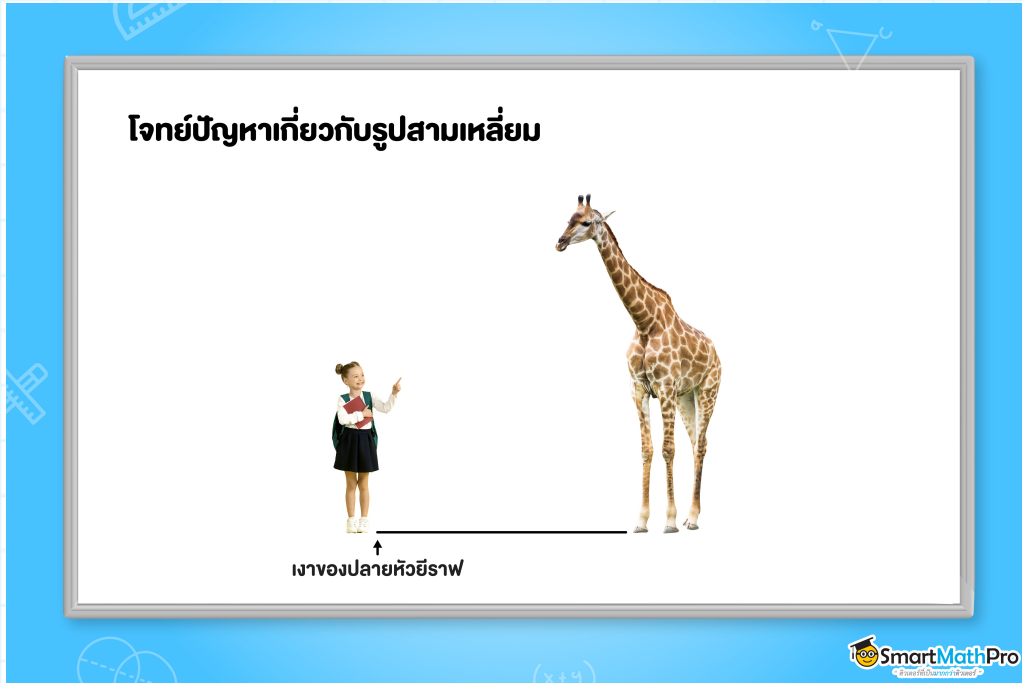
น้อง ๆ อาจสังเกตว่าในแทบจะทุกบทของเนื้อหาคณิตม.ต้นจะต้องปิดท้ายด้วยหัวข้อโจทย์ปัญหาเสมอเลยใช่ไหม ในบทนี้ก็เช่นกัน

เราสามารถนำความรู้เรื่องรูปสามเหลี่ยมคล้ายกันไปใช้ในการแก้ปัญหาในชีวิตประจำวันได้นะ

พี่แนะนำว่าให้น้อง ๆ ลองถอดข้อความที่โจทย์กำหนดให้มาเป็นแผนภาพก่อน แล้วหารูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันให้เจอ ก็จะโจทย์ปัญหาได้แล้วนะ สังเกตได้จากตัวอย่างต่อไปนี้เลย

ตัวอย่างที่ 6

จุ่มไปเที่ยวสวนสัตว์แห่งหนึ่งและได้พกเอาตลับเมตรไปด้วย จุ่มต้องการวัดส่วนสูงของยีราฟด้วยการใช้เงา โดยจุ่มยืนอยู่ตรงเงาของปลายหัวของยีราฟพอดี จุ่มวัดเงาของยีราฟได้ยาว 8 เมตร จุ่มวัดเงาของตัวเองได้ยาว 3.4 เมตร ถ้าจุ่มสูง 170 เซนติเมตร แล้วยีราฟจะสูงเท่าใด



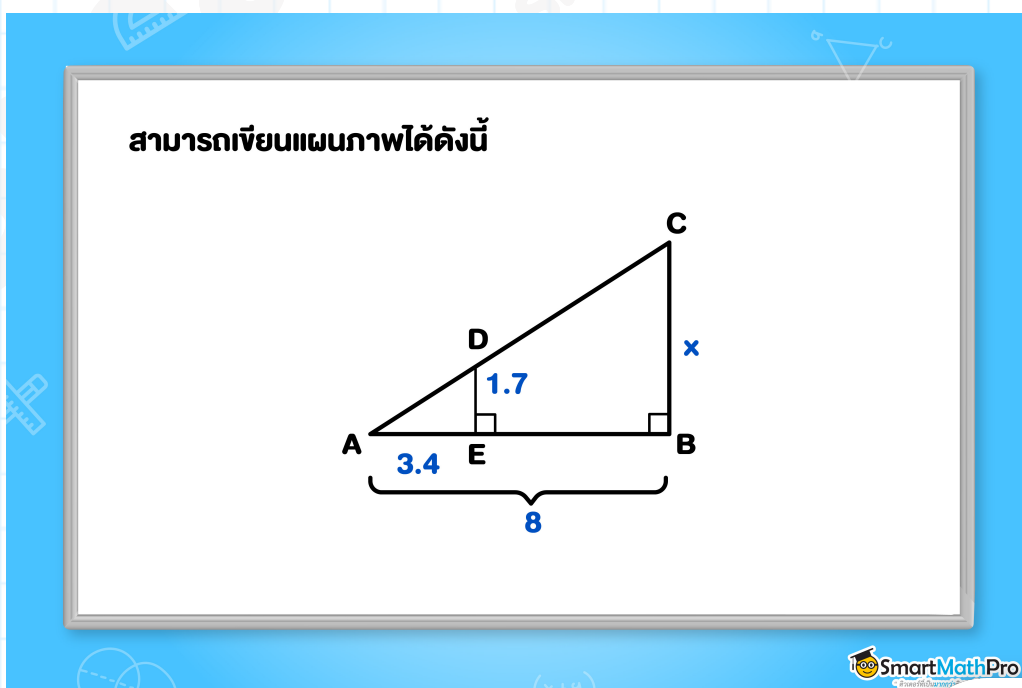
วิธีทำ

กำหนดให้ยีราฟสูงเท่ากับ $CD = x$ เมตร

AB แทนความยาวของเงาของยีราฟ คือ 8 เมตร

DE แทนความสูงของจุ่ม คือ 1.7 เมตร

AE แทนความยาวของเงาของจุ่ม คือ 3.4 เมตร



พิจารณา $\triangle ABC \sim \triangle AED$

จะได้ว่า $\hat{A} = \hat{A}$ เนื่องจากเป็นมุมร่วมและ $\hat{B} = \hat{E} = 90^\circ$

จากข้อสังเกต จะได้ว่า $\hat{C} = \hat{D}$

ดังนั้น $\triangle ABC \sim \triangle AED$ จะได้ว่า $\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{ED}$

$$\frac{8}{3.4} = \frac{x}{1.7}$$

$$x = \left(\frac{8}{3.4}\right)(1.7) = 4$$

ดังนั้น ยี่ราฟสูง 4 เมตร



“เวลาที่ดียิ่งที่สุดในการเริ่มต้น คือ ตอนนี้”
- พี่ป๋น SmartMathPro -

สนใจติวคณิตศาสตร์เพิ่มเติม online.smartmathpro.com