

ลำดับและอนุกรม ม.6

ลำดับ

ความหมายของลำดับ

บทนิยาม

ลำดับ (sequence) คือ พังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซต $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ หรือมีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

ในการเขียนแสดงลำดับ

เรียก a_1 ว่า พจน์ที่ 1 ของลำดับ

เรียก a_2 ว่า พจน์ที่ 2 ของลำดับ

เรียก a_3 ว่า พจน์ที่ 3 ของลำดับ

$\vdots$

และเรียก a_n ว่า พจน์ที่ n ของลำดับหรือพจน์ทั่วไปของลำดับ

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนสี่พจน์แรกของลำดับ $a_n = 2n + 1$

วิธีทำ

$$a_1 = 2(1) + 1 = 3$$

$$a_2 = 2(2) + 1 = 5$$

$$a_3 = 2(3) + 1 = 7$$

$$a_4 = 2(4) + 1 = 9$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับ คือ 3, 5, 7, 9

ลำดับจำกัดและลำดับอนันต์

ลำดับจำกัด (finite sequence) คือ ลำดับที่มีโดเมนเป็นเซต $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ ซึ่งเขียนแสดง

ลำดับจำกัดด้วย $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

ลำดับอนันต์ (infinite sequence) คือ ลำดับที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก ซึ่งเขียนแสดง

ลำดับอนันต์ ด้วย $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$

ลำดับเลขคณิต

บทนิยาม

ลำดับเลขคณิต (arithmetic sequence) คือ ลำดับซึ่งมีผลต่างที่ได้จากการนำพจน์ที่ $n + 1$ ลบด้วยพจน์ที่ n เป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n และเรียกค่าคงตัวที่เป็นผลต่างนี้ว่า
ผลต่างร่วม (common difference : d)

ถ้าลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับเลขคณิต แล้ว $d = a_{n+1} - a_n$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลต่างร่วม (d) ของลำดับเลขคณิตต่อไปนี้

1) 2, 5, 8, ...

จะได้ว่า $d = 3$

2) 2, 2, 2, ...

จะได้ว่า $d = 0$

3) 15, 10, 5, 0, ...

จะได้ว่า $d = -5$

สูตรพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต

ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับเลขคณิต จะมีพจน์ทั่วไปของลำดับ คือ

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต 3, 7, 11, ...

วิธีทำ

จาก $a_1 = 3$ และ $a_2 = 7$

จะได้ว่า $d = a_2 - a_1 = 7 - 3 = 4$

$$\text{จาก } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\text{จะได้ว่า } a_n = 3 + (n-1)(4)$$

$$a_n = 3 + 4n - 4$$

$$a_n = 4n - 1$$

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต 3, 7, 11, ... คือ $a_n = 4n - 1$

ลำดับเรขาคณิต

บทนิยาม

ลำดับเรขาคณิต (geometric sequence) คือ ลำดับซึ่งมีอัตราส่วนของพจน์ที่ $n + 1$ ต่อพจน์ที่ n เป็นค่าคงตัวที่เท่ากัน สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n และเรียกค่าคงตัวที่เป็นอัตราส่วนนี้ว่า อัตราส่วนร่วม (common ratio : r)

ถ้าลำดับ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับเรขาคณิต

แล้ว $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ตัวอย่างที่ 4 จงหาอัตราส่วนร่วม (r) ของลำดับเรขาคณิตต่อไปนี้

1) 2, 4, 8, ...

จะได้ว่า $r = 2$

2) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$

จะได้ว่า $r = \frac{1}{3}$

3) 3, 3, 3, ...

จะได้ว่า $r = 1$

สูตรพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต

ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับเรขาคณิต จะมีพจน์ทั่วไปของลำดับ คือ

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต 1, 4, 16, ...

วิธีทำ

จาก $a_1 = 1$ และ $a_2 = 4$

จะได้ว่า $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{1} = 4$

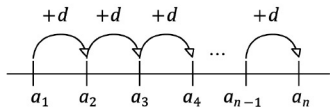
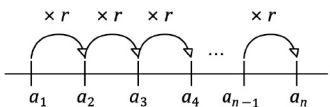
จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ว่า $a_n = (1)(4)^{n-1}$

$$a_n = 4^{n-1}$$

ดังนั้น พจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต 1, 4, 16, ... คือ $a_n = 4^{n-1}$

สรุปเกี่ยวกับลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต

ลำดับเลขคณิต	ลำดับเรขาคณิต
	
ผลต่างร่วม $d = a_{n+1} - a_n$	อัตราส่วนร่วม $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$
พจน์ทั่วไป $a_n = a_1 + (n-1)d$	พจน์ทั่วไป $a_n = a_1 r^{n-1}$

ลิมิตของลำดับอนันต์

ความหมายของลิมิตของลำดับอนันต์

บทนิยาม

ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับอนันต์ ถ้า n มากขึ้นโดยไม่มีที่สิ้นสุด

แล้ว a_n เข้าใกล้หรือเท่ากับจำนวนจริง L เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น

จะเขียน $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ และจะเรียก L ว่า ลิมิตของลำดับ

ลำดับลู่เข้า คือ ลำดับอนันต์ที่มีลิมิต และลำดับลู่ออก คือ ลำดับอนันต์ที่ไม่ใช่ลำดับลู่เข้า

ตัวอย่างที่ 6 จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้ เป็นลำดับลู่เข้าหรือลำดับลู่ออก

1) $3, 3, 3, \dots$

ตอบ เป็นลำดับลู่เข้า

2) $-6, -3, 0, \dots$

ตอบ เป็นลำดับลู่ออก

3) $a_n = \frac{1}{4n}$

ตอบ เป็นลำดับลู่เข้า

สมบัติของลิมิตของลำดับอนันต์

ให้ a_n, b_n, t_n เป็นลำดับของจำนวนจริง A, B เป็นจำนวนจริง และ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

โดยที่ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ จะได้ว่า

- ถ้า $t_n = c$ ทุกจำนวนเต็มบวกแล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c = c$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = cA$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A \pm B$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A \cdot B$
- ถ้า $b_n \neq 0$ ทุกจำนวนเต็มบวก n และ $B \neq 0$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right)$ แล้ว $\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{A}{B}$
- ให้ m เป็นจำนวนเต็มที่มีมากกว่า 1 แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = \sqrt[m]{A}$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาลิมิตของลำดับ เมื่อ $a_n = \frac{3n-2}{n}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-2}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{n} - \frac{2}{n} \right) \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} 3 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \\&= 3 - 0 = 3\end{aligned}$$

อนุกรมจำกัด

ความหมายของอนุกรมจำกัด

บทนิยาม

ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับจำกัดที่มี n พจน์ จะเรียกการเขียนแสดงการบวกของทุกพจน์ของลำดับในรูป $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ ว่า อนุกรมจำกัด (finite series)

เราจะเรียก a_n ว่า พจน์ที่ n ของอนุกรม และให้ S_n แทนผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม

พิจารณาลำดับต่อไปนี้

1, 3, 5, 7, 9, 11

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}S_6 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \\&= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 \\&= 36\end{aligned}$$

อนุกรมเลขคณิต

อนุกรมเลขคณิต คือ อนุกรมที่ได้จากการลำดับเลขคณิต
โดยผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต คือ

$$S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

$$\text{หรือ } S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

SmartMathPro
" ตัวเต๋ที่เป็นมากกว่าตัวเต๋ "

จากสองสูตรของอนุกรมเลขคณิต จะเห็นว่าสูตรแรกเราจะใช้เมื่อเราทราบพจน์แรกและพจน์ที่ n
ส่วนสูตรที่สองเราจะใช้เมื่อไม่ทราบพจน์ที่ n

ตัวอย่างที่ 8 จงหาผลบวกของอนุกรมเลขคณิต $4 + 7 + 10 + \dots + 31$

วิธีทำ

ขั้นตอนที่ 1 หา n

จาก $a_n = 4, a_n = 31$ และ $d = 7 - 4 = 3$

จากสูตรพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิตคือ $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ว่า $31 = 4 + (n-1)(3)$

$$31 = 4 + 3n - 3$$

$$30 = 3n$$

$$n = 10$$

ขั้นตอนที่ 2 หาผลบวกของอนุกรมเลขคณิต

จากสูตรอนุกรมเลขคณิต $s_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$

จะได้ว่า $s_n = \frac{10}{2} (4 + 31) = 5(35) = 175$

อนุกรมเรขาคณิต

อนุกรมเรขาคณิต คือ อนุกรมที่ได้จากลำดับเรขาคณิต
โดยผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต คือ

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} \quad \text{เมื่อ } r > 1$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r} \quad \text{เมื่อ } r < 1$$

น้องจะเห็นว่าสูตรเรขาคณิตมี 2 สูตรซึ่งเราแยกออกมาเป็น 2 สูตรเพื่อให้ตัวส่วนเป็นบวกและง่ายต่อการคิด แต่จริง ๆ แล้วเราสามารถจำสูตรเดียวได้เลยนะ ได้ค่าเท่ากันเลย

ตัวอย่างที่ 9 จงหาผลบวกของอนุกรมเรขาคณิต $800 + 400 + 200 + \dots + 25$

วิธีทำ

ขั้นตอนที่ 1 หาค่า n

จาก $a_1 = 800$ และ $r = \frac{400}{800} = \frac{1}{2}$

จากสูตรพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิตคือ $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ว่า $25 = 800\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$\frac{1}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$5 = n - 1$$

$$n = 6$$

ขั้นตอนที่ 2 หาผลบวกของอนุกรมเรขาคณิต

จากสูตรอนุกรมเรขาคณิต $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

จะได้ว่า $S_6 = \frac{800\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{800\left(\frac{63}{64}\right)}{\frac{1}{2}} = 1,575$

อนุกรมอนันต์

ความหมายของอนุกรมอนันต์

อนุกรมอนันต์ คือ อนุกรมของลำดับอนันต์

กำหนดอนุกรมอนันต์ $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$

ให้ $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมนี้

อนุกรมลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ s_n เป็นลำดับลู่เข้า หรือกล่าวได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$

เมื่อ s เป็นจำนวนเต็มจริง และเรียก s ว่าผลบวกของอนุกรมอนันต์

อนุกรมลู่ออก ก็ต่อเมื่อ s_n เป็นลำดับลู่ออก หรือกล่าวได้ว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ ไม่มีค่า

อนุกรมเรขาคณิตอนันต์

อนุกรมเรขาคณิตอนันต์

ให้ $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต
จะได้ว่า

- $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1-r}$ เมื่อ $|r| < 1$
อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

- $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ ไม่มีค่า เมื่อ $|r| \geq 1$
อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่างที่ 10 จงพิจารณาว่าอนุกรม $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} + \dots$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรืออนุกรมลู่ออก ถ้าเป็นอนุกรมลู่เข้า จงหาผลบวกของอนุกรม

วิธีทำ

พิจารณา $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} + \dots$

จะได้ว่า $r = \frac{1}{3}$ ซึ่ง $|r| = \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} < 1$

ดังนั้น อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

โดยผลบวกของอนุกรมเท่ากับ $\frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$

อนุกรมรูปแบบพิเศษ

อนุกรมเทเลสโคปิก

อนุกรมเทเลสโคปิก คือ อนุกรมที่สามารถจัดให้อยู่ในรูปของ $a_n - a_{n+1}$ ได้ ให้น้อง ๆ จัดรูปให้เป็นเศษส่วนย่อย โดยมีสูตรคือ

$$\frac{1}{ab} = \left(\frac{1}{b-a}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

เราลองไปดูการหาผลบวกของอนุกรมเทเลสโคปิก และใช้สูตรผ่านตัวอย่างต่อไปนี้กัน

ตัวอย่างที่ 11 จงหาผลบวกของอนุกรม $\frac{1}{3 \times 6} + \frac{1}{6 \times 9} + \frac{1}{9 \times 12} + \dots + \frac{1}{27 \times 30}$

วิธีทำ

$$\frac{1}{3 \times 6} + \frac{1}{6 \times 9} + \frac{1}{9 \times 12} + \dots + \frac{1}{27 \times 30}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{12}\right) + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{27} - \frac{1}{30}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)\left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{12}\right) + \dots + \left(\frac{1}{27} - \frac{1}{30}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{30}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{9}{30}\right)$$

$$= \frac{1}{10}$$

อนุกรมผสม

อนุกรมผสมมีหลายรูปแบบ เช่น อนุกรมผสมระหว่างอนุกรมเลขคณิตกับอนุกรมเรขาคณิต อนุกรมผสมระหว่างอนุกรมเลขคณิตกับอนุกรมอนันต์ เป็นต้น และด้วยรูปแบบที่ไม่ตายตัวของอนุกรมผสม ทำให้วิธีการหาค่าของอนุกรมผสมมีหลากหลาย แต่ไม่ยากเกินความสามารถแน่นอน

ตัวอย่างที่ 12 จงหาผลบวกของอนุกรม $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \frac{9}{32} + \frac{11}{64}$

วิธีทำ

$$\text{กำหนดให้ } S = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \frac{9}{32} + \frac{11}{64}$$

นำ $\frac{1}{2}$ คูณทั้งสองข้างของสมการ

$$\text{จะได้ว่า } \frac{1}{2}S = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{5}{16} + \frac{7}{32} + \frac{9}{64} + \frac{11}{128}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} S - \frac{1}{2}S &= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \frac{9}{32} + \frac{11}{64} \right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{5}{16} + \frac{7}{32} + \frac{9}{64} + \frac{11}{128} \right) \\ \frac{1}{2}S &= \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{2}{8} + \frac{2}{16} + \frac{2}{32} + \frac{2}{64} - \frac{11}{128} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\frac{2}{4} + \frac{2}{8} + \frac{2}{16} + \frac{2}{32} + \frac{2}{64}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{2}$

และ $n = 5$ และผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต คือ $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

ดังนั้น

$$\frac{2}{4} + \frac{2}{8} + \frac{2}{16} + \frac{2}{32} + \frac{2}{64} = \frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{31}{32}$$

$$\text{จะได้ว่า } \frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{31}{32} - \frac{11}{128} = \frac{177}{128}$$

$$\text{ดังนั้น } S = \left(\frac{177}{128} \right)(2) = \frac{177}{64}$$

สัญลักษณ์แสดงการบวก

เพื่อความสะดวกในการเขียนอนุกรม เราจะใช้อักษรกรีก Σ (อ่านว่า ซิกมา) เป็นสัญลักษณ์

แสดงการบวก สามารถเขียนได้เป็น $\sum_{i=1}^n a_i$ หรือ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ แต่ไม่จำเป็นต้องเป็นตัวแปร i น่ะ

และสามารถเริ่มต้นที่ใด ๆ ก็ได้ไม่จำเป็นต้องเริ่มที่ 1 เช่น $\sum_{n=0}^3 (n+2) = 2 + 3 + 4 + 5$

สมบัติของซิกมา

กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ จะได้ว่า

$$1) \sum_{i=1}^n c = nc \text{ เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

$$2) \sum_{i=1}^n ca_i = c \sum_{i=1}^n a_i \text{ เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

$$3) \sum_{i=1}^n (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^n a_i \pm \sum_{i=1}^n b_i$$

จากสมบัติของซิกมา จะเห็นว่าเราสามารถกระจายซิกมาเข้าไปในการบวกและลบได้

แต่เราไม่สามารถกระจายเข้าไปในการคูณและการหารได้ ระวังด้วยน้า

ตัวอย่างที่ 13 จงหา $\sum_{i=1}^4 (i^2 - i)$

วิธีทำ $\sum_{i=1}^4 (i^2 - i) = \sum_{i=1}^4 i^2 - \sum_{i=1}^4 i$

$$= (1 + 4 + 9 + 16) - (1 + 2 + 3 + 4)$$

$$= 30 - 10$$

$$= 20$$

ดอกเบี้ยและมูลค่าเงิน

ในบทนี้ เราสามารถนำความรู้เรื่องลำดับและอนุกรมมาประยุกต์ใช้ในการคิดดอกเบี้ยและมูลค่าเงินลองไปดูกันเลย

ดอกเบี้ยทบต้น

สูตรดอกเบี้ยทบต้นปีละ 1 ครั้ง

ถ้าเริ่มฝากเงินด้วยเงินต้น P บาท
ได้รับอัตราดอกเบี้ย $i\%$ ต่อปี
คิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละ 1 ครั้ง
เมื่อฝากเงินครบ n ปี

จะได้เงินรวม S บาท โดยที่

$$S = P(1 + r)^n$$

$$\text{เมื่อ } r = \frac{i}{100}$$

สูตรดอกเบี้ยทบต้นปีละหลายครั้ง

ถ้าเริ่มฝากเงินด้วยเงินต้น P บาท
ได้รับอัตราดอกเบี้ย $i\%$ ต่อปี
คิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละ k ครั้ง
เมื่อฝากเงินครบ n ปี

จะได้เงินรวม S บาท โดยที่

$$S = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kn}$$

$$\text{เมื่อ } r = \frac{i}{100}$$

เราจะใช้ทั้งสองสูตรนี้ในการคำนวณหาเงินรวม โดยสูตรที่ต่างกันขึ้นกับว่าเป็นการคิดดอกเบี้ยทบต้นปีละ 1 ครั้ง หรือปีละหลายครั้ง

มูลค่าของเงิน

มูลค่าของเงิน

สูตร มูลค่าเงินอนาคตเงินต้นและมูลค่าปัจจุบันของเงินรวม

เราจะเรียก S ว่า มูลค่าอนาคตของเงินต้น P โดย

$$S = P \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kn}$$

เราจะเรียก P ว่า มูลค่าปัจจุบันของเงินรวม S โดย

$$P = \frac{S}{\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kn}}$$

เมื่อได้รับอัตราดอกเบี้ย $i\%$ ต่อปี คิดดอกเบี้ยแบบทบต้นปีละ k ครั้ง และฝากเงินครบ n ปี

ค่างวด

เงินฝาก

ค่างวด (เงินฝาก)

สมมติฝากเงินงวดละ R บาท ทั้งหมด 4 งวด อัตราดอกเบี้ยต่องวด $i\%$ และ $r = \frac{i}{100}$

ต้นงวด มูลค่าอนาคต	สิ้นงวด มูลค่าอนาคต

ถ้ารวมเงินทั้งหมดเข้าด้วยกัน จะเรียกว่า เงินรวม ใช้ในเรื่องการฝากประจำ

จากรูป เงินรวมของต้นงวด : $R(1+r) + R(1+r)^2 + R(1+r)^3 + R(1+r)^4$

เงินรวมของสิ้นงวด : $R + R(1+r) + R(1+r)^2 + R(1+r)^3$

ลองไปดูการคิดเงินรวมจากตัวอย่างต่อไปนี้นะ

ตัวอย่างที่ 14 จอร์จเก็บเงินเดือนละ 2,000 บาท เป็นเวลา 6 เดือน โดยฝากธนาคารทุกต้นเดือน
อยากทราบว่าเมื่อสิ้นเดือนที่ 6 จอร์จจะมีเงินเก็บเท่าใด หากธนาคารคิดดอกเบี้ยร้อยละ 24 ต่อปี
และดอกเบี้ยคิดทบต้นทุกเดือน

วิธีทำ

$$i = \frac{24}{12} = 2 \text{ จะได้ } r = \frac{2}{100} = 0.02$$

$$S_6 = \frac{2000(1.02)(1.02^6 - 1)}{1.02 - 1} = 12,868.57$$

ดังนั้น จอร์จจะมีเงินเก็บ 12,868.57 บาท

ตัวอย่างที่ 15 จุ้ยเก็บเงินเดือนละ 2,000 บาท เป็นเวลา 6 เดือน โดยฝากธนาคารทุกสิ้นเดือน
อยากทราบว่าเมื่อสิ้นเดือนที่ 6 จุ้ยจะมีเงินเก็บเท่าใด หากธนาคารคิดดอกเบี้ยร้อยละ 24 ต่อปี
และดอกเบี้ยคิดทบต้นทุกเดือน

วิธีทำ

$$i = \frac{24}{12} = 2 \text{ จะได้ } r = \frac{2}{100} = 0.02$$

$$S_6 = \frac{2000(1.02^6 - 1)}{1.02 - 1} = 12,616.24$$

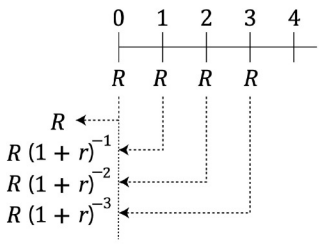
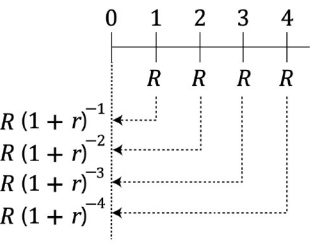
ดังนั้น จุ้ยจะมีเงินเก็บ 12,616.24 บาท

จากตัวอย่างที่ 14 และ 15 เราจะได้ว่าการฝากเงินที่เงินฝาก ระยะเวลาการฝาก ดอกเบี้ยเท่ากัน
แต่ช่วงเวลาในการฝากต่างกัน คือต้นงวดและสิ้นงวด จะได้เงินรวมที่ไม่เท่ากัน

เงินผ่อน

เงินผ่อน (เงินผ่อน)

สมมติฝากเงินงวดละ R บาท ทั้งหมด 4 งวด อัตราดอกเบี้ยต่องวด $i\%$ และ $r = \frac{i}{100}$

ต้นงวด มูลค่าปัจจุบัน	สิ้นงวด มูลค่าปัจจุบัน
	

ถ้ารวมเงินทั้งหมดเข้าด้วยกัน จะเรียกว่า มูลค่าปัจจุบันของเงินผ่อนทั้งหมดใช้ในการผ่อนสินค้า

เช่น เงินผ่อนของต้นงวด : $R + R(1+r)^{-1} + R(1+r)^{-2} + R(1+r)^{-3}$

เงินผ่อนของต้นงวด : $R(1+r)^{-1} + R(1+r)^{-2} + R(1+r)^{-3} + R(1+r)^{-4}$

“เวลาที่ดียิ่งที่สุดในการเริ่มต้น คือ ตอนนี้”

- พี่ป๊าน SmartMathPro -

สนใจติวคณิตศาสตร์เพิ่มเติม online.smartmathpro.com