ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน ม.4

ความสัมพันธ์

"ความสัมพันธ์" เป็นคำที่เราใช้กันบ่อยมาก เช่น ความสัมพันธ์แบบเพื่อน แฟน Friend Zone หรือ แม้กระทั่งความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งของกับสิ่งของก็ตาม อย่างไรก็ตาม นักคณิตศาสตร์อยากลองนิยามคำว่า "ความสัมพันธ์" ให้ชัดเจนว่ามันมีหน้าตาเป็นอย่างไร ไปดูกันน

ผลคูณคาร์ทีเซียน

บทนิยาม

ผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B คือเซตของคู่อันดับ (a, b) ทั้งหมด โดยที่ a เป็นสมาชิกของเซต A และ b เป็นสมาชิกของเซต B

สามารถเขียนผลคูณคาร์ทีเซียนของเซต A และเซต B แทนด้วย $A \times B$

เช่น กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{a, b\}$

ดังนั้น $A \times B = \{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b)\}$

ความสัมพันธ์

บทนิยาม

r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ r เป็นสับเซตของ $A \times B$

เช่น กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{1, 3\}$

ถ้า $r_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid x < y\}$ จะสามารถเขียนแจกแจงสมาชิกได้ดังนี้ $r_1 = \{(1, 3), (2, 3)\}$

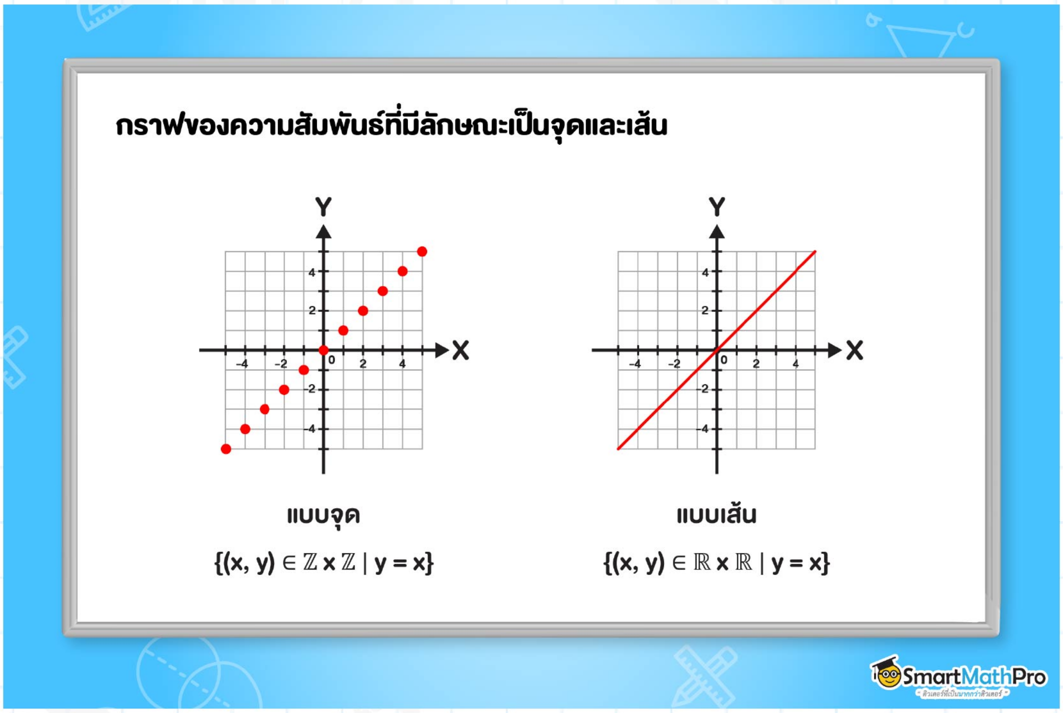
หรือเราสามารถเรียกได้ว่า r_1 เป็นความสัมพันธ์ "น้อยกว่า" จาก A ไป B

กราฟของความสัมพันธ์

ในหัวข้อนี้เราจะสนใจเฉพาะความสัมพันธ์ของจำนวนเท่านั้น โดยเราสามารถนำความสัมพันธ์มาแสดงเป็นภาพได้โดยนำคู่อันดับในความสัมพันธ์มาแสดงเป็นพิกัดของจุดแล้ววางลงไปบนระนาบ XY ก็จะได้ออกมาเป็นกราฟของความสัมพันธ์ต่าง ๆ

กราฟของความสัมพันธ์ r มีอยู่ 3 ลักษณะ

1. กราฟมีลักษณะเป็น**จุด**
   เช่น (x, y) เป็นสมาชิกของ $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ ดังรูป
2. กราฟมีลักษณะเป็น**เส้น**
   เช่น (x, y) เป็นสมาชิกของ $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ มีเงื่อนไขเป็น**สมการ** ดังรูป
3. กราฟมีลักษณะเป็น**พื้นที่**
   เช่น (x, y) เป็นสมาชิกของ $(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ มีเงื่อนไขเป็น**อสมการ**



ข้อสังเกต

เรานำสมาชิกตัวหน้ามาเป็นค่าตำแหน่งบนแกน X และนำสมาชิกตัวหลังเป็นค่าตำแหน่งบนแกน Y แล้วใช้ค่าตำแหน่งทั้งสองมาเป็นพิกัดในการลงจุดเพื่อวาดกราฟ

โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

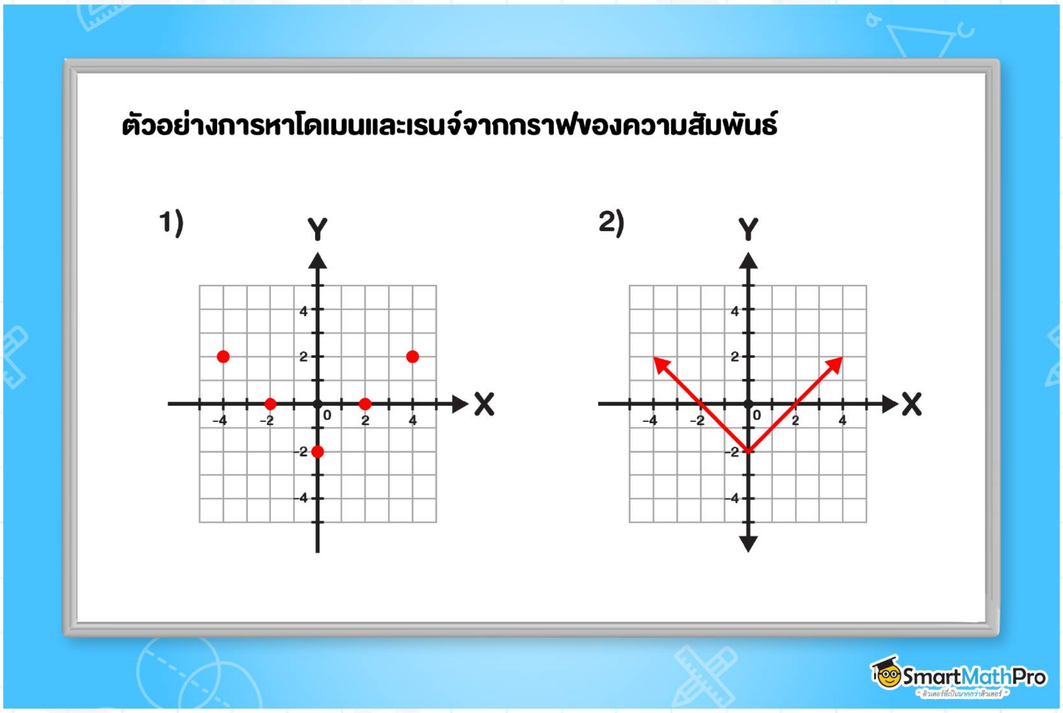
คราวนี้ก็มาถึงหัวข้อที่สำคัญมาก ๆ และน้อง ๆ ทุกคนจะได้เจอในข้อสอบอย่างแน่นอนนั่น คือ **โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์** ซึ่งเราจะต้องหาทั้งในรูปแบบของเซตและกราฟได้ ดังนั้น เรามาทำความรู้จักกับบทนิยามของโดเมนและเรนจ์กันก่อนเลย

บทนิยาม

ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

- โดเมนของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับทั้งหมดใน r เขียนแทนด้วย D_r
- เรนจ์ของ r คือ เซตของสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับทั้งหมดใน r เขียนแทนด้วย R_r

ตัวอย่างที่ 1 จงหาโดเมนและเรนจ์จากกราฟของความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้



วิธีทำ

จากข้อ 1)

กำหนดให้เป็นกราฟของความสัมพันธ์ r_1

จะได้ว่า $r_1 = \{(-4, 2), (-2, 0), (0, -2), (2, 0), (4, 2)\}$

ดังนั้น $D_{r_1} = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ และ $\mathrm{R}_{r_1} = \{-2, 0, 2\}$

จากข้อ 2)

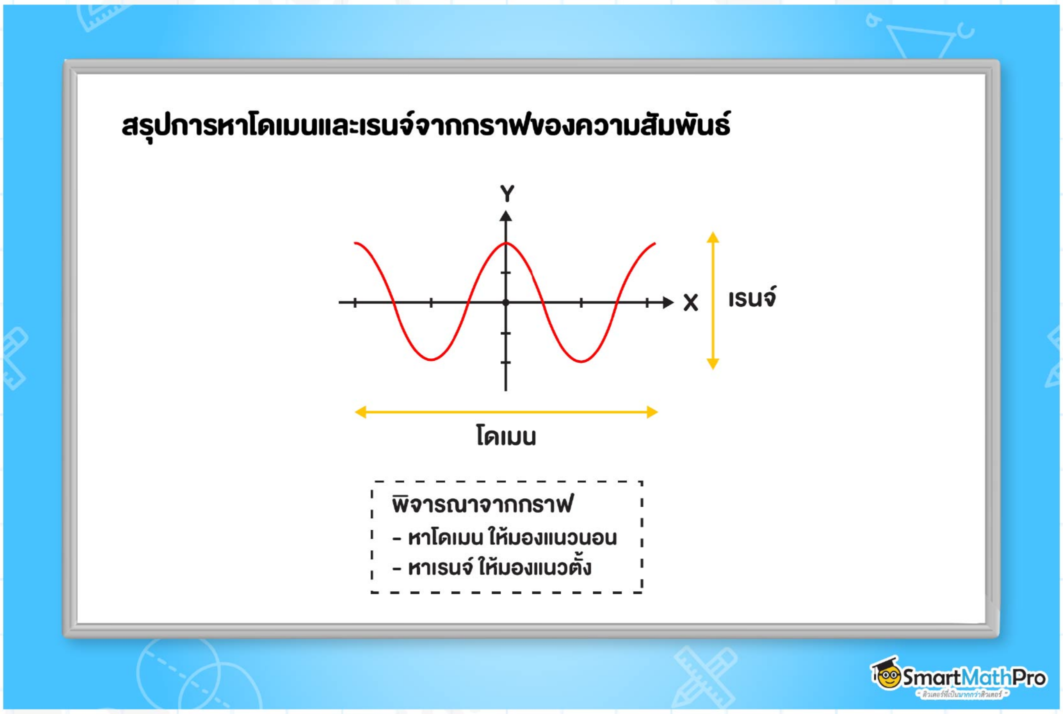
แนวคิด เราสามารถมองเส้นจากกราฟของความสัมพันธ์ r_2 ได้ว่าเป็นจุดจำนวนมากเรียงต่อกัน จนกลายเป็นเส้น ดังนั้น วิธีการหาโดเมนและเรนจ์จากกราฟในข้อนี้สามารถมองได้ด้วยวิธีคล้ายกับกับข้อ 1)

สมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับจะเป็นจำนวนจริงทั้งหมดเลย (ตั้งแต่ $-\infty$ จนถึง ∞)

ถ้าเริ่มมองจากแกน Y ด้านล่างขึ้นมา จะเห็นว่าสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับจะเป็นจำนวนตั้งแต่ -2 จนถึง ∞

จะได้ว่า $D_{r_2} = R$ และ $R_{r_2} = [-2, \infty)$

จากตัวอย่างก่อนหน้า เราสามารถสรุปการหาโดเมนและเรนจ์จากกราฟของความสัมพันธ์ได้เป็นดังนี้เลยย



นอกจากการหาโดเมนและเรนจ์จากกราฟของความสัมพันธ์แล้ว ถ้าโจทย์ให้ความสัมพันธ์ที่เขียนในรูปของเซตแบบบอกเงื่อนไข เราจะใช้เทคนิคในการพิจารณาเงื่อนไขแล้วหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ ซึ่งจะมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

เทคนิค การหาโดเมนและเรนจ์ด้วยวิธีพิจารณาจากเงื่อนไข

ให้พิจารณาเงื่อนไขดังนี้

- $\frac{\blacktriangle}{\blacksquare}$

  จะได้ว่า $\blacksquare \neq 0$ (ตัวส่วนไม่เท่ากับศูนย์)

- $\sqrt[n]{\blacksquare} = \blacktriangle \neq 0$ (เมื่อ n เป็นจำนวนคู่)

  จะได้ว่า $\blacksquare \geq 0$ และ $\blacktriangle \geq 0$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

1. $r_1 = \{(x, y) \mid y = \frac{1}{x+1}\}$

วิธีทำ พิจารณา $\frac{1}{x+1}$ จะเห็นว่า $x + 1$ ต้องไม่เป็นศูนย์

นั่นคือ $x \neq -1$

ดังนั้น $D_{r_1} = \{x \mid x \neq -1\} = R - \{-1\}$

พิจารณา $x = \frac{1}{x+1}$

จะได้ว่า $y \neq 0$

ดังนั้น $R_{r_1} = \{y \mid y \neq 0\} = R - \{0\}$

2. $r_2 = \{(x, y) \mid y = \sqrt{x}\}$

วิธีทำ พิจารณา $\sqrt{x}$

จะได้ว่า x ต้องไม่เป็นจำนวนลบ

ดังนั้น $D_{r_2} = \{x \mid x \geq 0\} = [0, \infty)$

เนื่องจาก x ไม่เป็นจำนวนลบ แล้วแทน x ด้วย 0 ใน $\sqrt{x}$ จะได้ค่าน้อยที่สุดเท่ากับ 0

ดังนั้น $R_{r_2} = \{y \mid y \geq 0\} = [0, \infty)$

ตัวผกผันของความสัมพันธ์

บทนิยาม

ตัวผกผันของความสัมพันธ์ r คือความสัมพันธ์ที่เกิดจากการสลับที่ของสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังในแต่ละคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของ r

ตัวผกผันของความสัมพันธ์ r เขียนแทนด้วย r^{-1}

เช่น ถ้า $r = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\}$ แล้ว $r^{-1} = \{(2, 1), (4, 3), (6, 5)\}$

ก่อนหน้านี้เราเคยเขียนความสัมพันธ์ให้อยู่ในรูปเซตแบบบอกเงื่อนไข ดังนั้นเราก็สามารถเขียนตัวผกผันของความสัมพันธ์ให้อยู่ในรูปของเซตแบบบอกเงื่อนไขได้เช่นกัน

เช่น

แบบที่ 1 : $r^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in r\}$ หรือ

แบบที่ 2 : $r^{-1} = \{(x, y) \in A \times B \mid (y, x) \in r\}$

ซึ่งถ้าน้อง ๆ ลองสังเกตจะเห็นว่าการเขียนทั้งสองแบบเกิดจากการสลับ x และ y

แต่แบบที่ 1 จะสลับที่ด้านหน้าเพียงอย่างเดียว ส่วนแบบที่ 2 จะสลับที่เพียงด้านหลังอย่างเดียว

เท่านั้น ถ้าใครเผลอไปเขียนตัวผกผันของความสัมพันธ์แล้วสลับทั้งสองที่จะผิดได้ !

ฟังก์ชัน

หลังจากที่เรารู้จักความสัมพันธ์กันไปแล้ว มันก็จะมีความสัมพันธ์บางอย่างที่เราได้ให้ชื่อมันเอาไว้ ซึ่งความสัมพันธ์ประเภทนี้จะเป็นพื้นฐานสำคัญที่นำไปต่อยอดในหัวข้ออื่น ๆ ได้อีกมากมาย ความสัมพันธ์นี้มีชื่อว่า **"ฟังก์ชัน"**

ความหมายของฟังก์ชัน

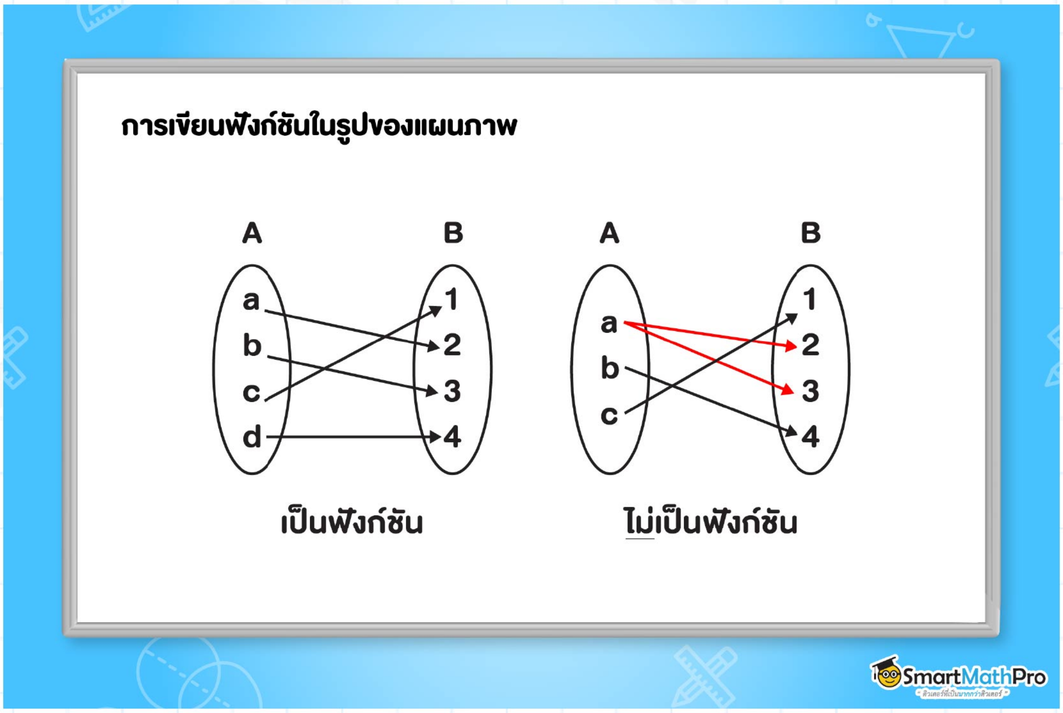
บทนิยาม

ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ที่คู่อันดับสองคู่อันดับใด ๆ ของความสัมพันธ์นั้น ถ้ามีสมาชิกตัวหน้าเหมือนกันแล้ว สมาชิกตัวหลังต้องเหมือนกัน

จากบทนิยามข้างต้น พี่จะขออธิบายง่าย ๆ แบบนี้ ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ที่**สมาชิกตัวหน้าแต่ละตัวจะจับกับสมาชิกตัวหลังเพียงค่าเดียวเท่านั้น**

ฟังก์ชันโดยส่วนใหญ่มักจะเขียนแสดงได้ 3 รูปแบบคือ แผนภาพ เซต และกราฟของฟังก์ชัน โดยกราฟของฟังก์ชันจะถูกใช้บ่อยและมีความสำคัญมาก พี่เลยจะขอยกให้เป็นหัวข้อใหญ่หลังจากพี่อธิบายการเขียนฟังก์ชันสองแบบแรก

1. เขียนในรูปของแผนภาพ



2. เขียนในรูปของเซต

สามารถเขียนได้ 2 แบบ คือ แบบแจกแจงสมาชิกตรง ๆ และ แบบบอกเงื่อนไข เช่น

แบบแจกแจงสมาชิก

- $f = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$

แบบบอกเงื่อนไข

- $g = \{(x, y) \mid y = 2x + 1\}$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $A = \{-1, 0, 1\}$ จงพิจารณาความสัมพันธ์ต่อไปนี้ว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่

1. $f = \{(x, y) \in A \times A \mid y = x\}$

วิธีทำ

จาก f เมื่อเขียนความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิกจะได้

$f = \{(-1, -1), (0, 0), (1, 1)\}$

สังเกตว่า สมาชิกของแต่ละตัวใน f ไม่มีคู่อันดับตัวไหนเลยที่ "ถ้าเลขตัวหน้าในคู่อันดับซ้ำกันแล้วตัวหลังไม่ซ้ำกัน" ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน

2. $g = \{(x, y) \in A \times A \mid y^2 = x\}$

วิธีทำ

จาก g เมื่อเขียนความสัมพันธ์แบบแจกแจงสมาชิกจะได้

$g = \{(0, 0), (1, 1), (1, -1)\}$

สังเกตว่า g มีคู่อันดับ $(1, 1)$ และ $(1, -1)$ มีเลขตัวหน้าในคู่อันดับซ้ำกันคือ เลข 1

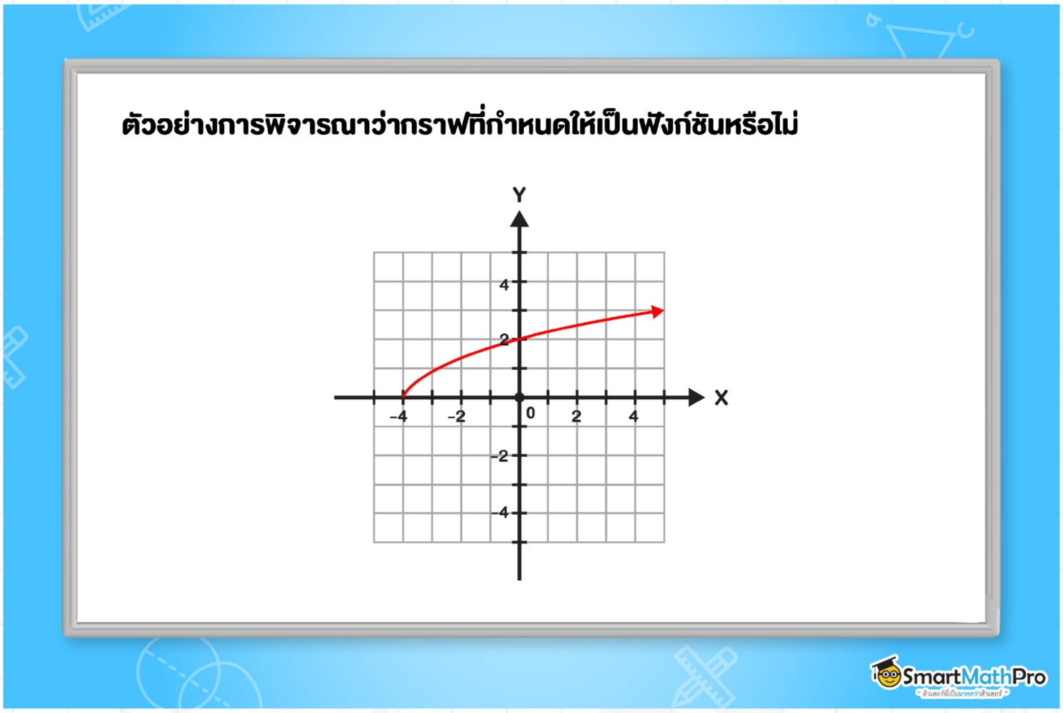
และมีตัวหลังต่างกันคือ 1 และ -1

ดังนั้น g ไม่เป็นฟังก์ชัน

3. กราฟของฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 4 จงพิจารณาว่ากราฟต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหรือไม่

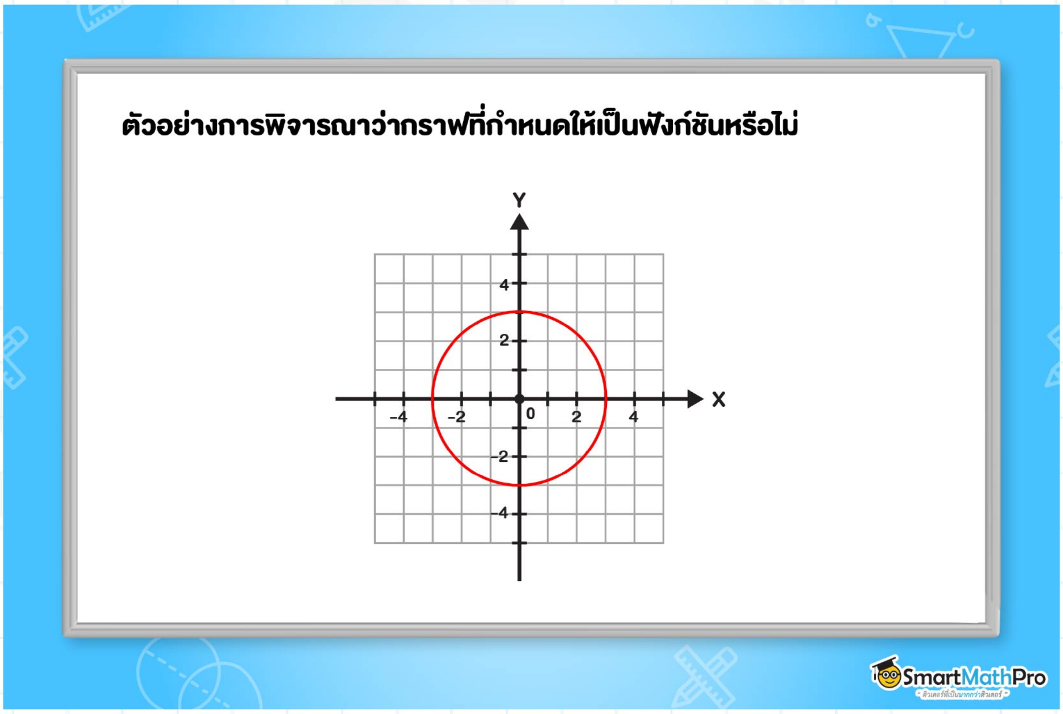
1.



วิธีทำ

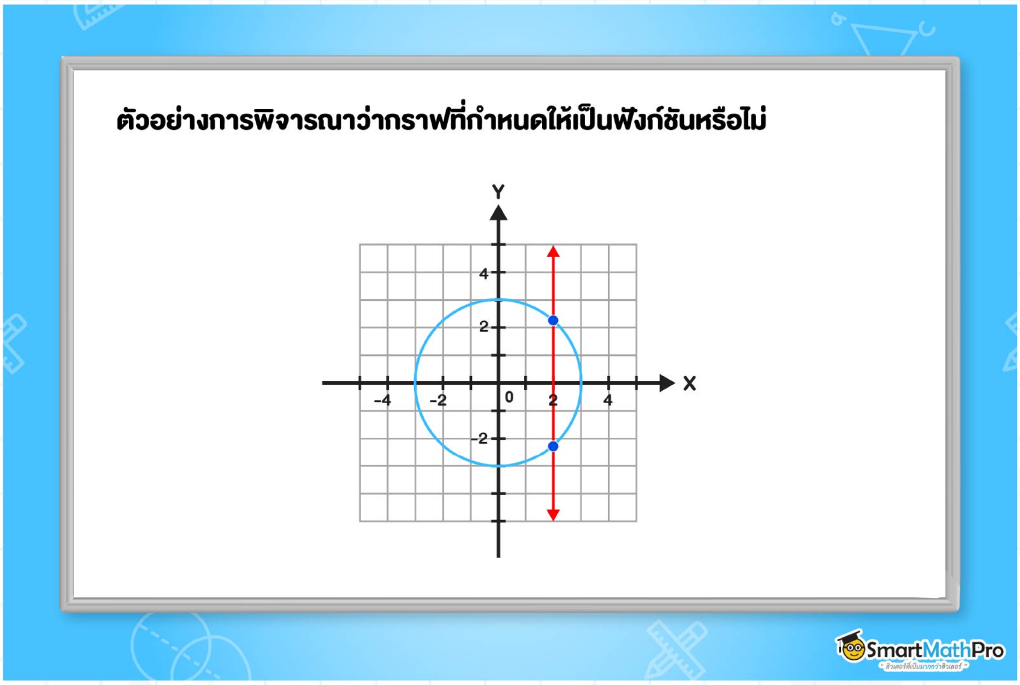
ลากเส้นตรงในแนวตั้ง (ขนานแกน Y) ให้ตัดผ่านกราฟ สังเกตว่า ไม่มีกรณีใดเลยที่เส้นตรงลากผ่านกราฟแล้วเกิดจุดตัดกราฟมากกว่า 1 จุด ดังนั้น กราฟดังกล่าวเป็นฟังก์ชัน

2.



วิธีทำ

ลากเส้นตรงในแนวตั้ง (ขนานแกน Y) ให้ตัดผ่านกราฟ สังเกตว่า มีบางกรณีที่เส้นตรงลากผ่านกราฟแล้วเกิดจุดตัดกราฟมากกว่า 1 จุด เช่น



ดังนั้น กราฟดังกล่าวไม่เป็นฟังก์ชัน

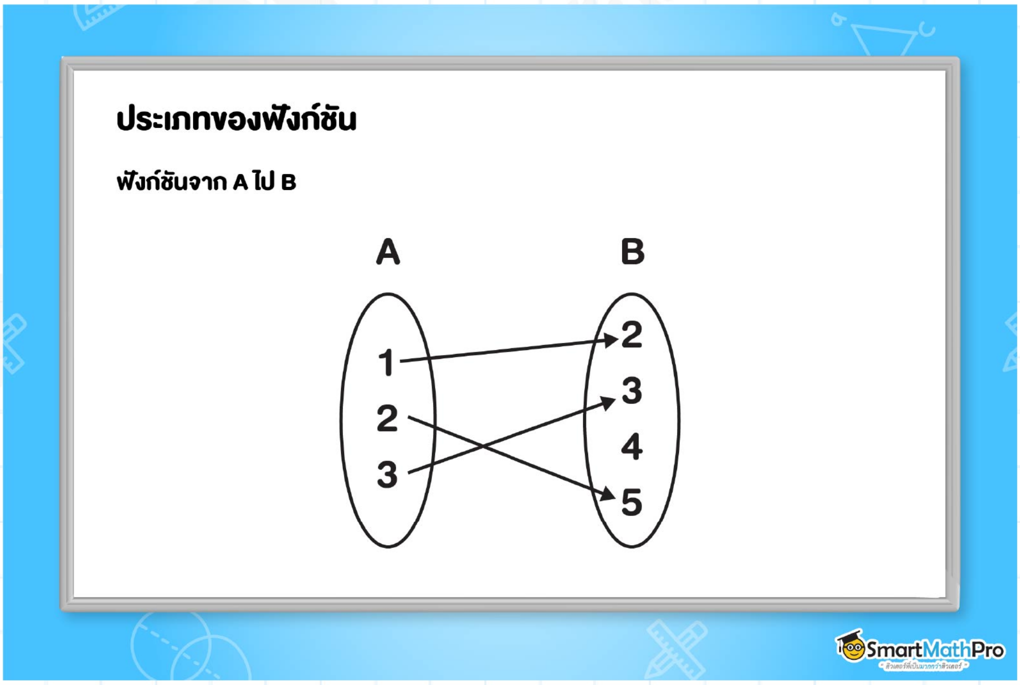
ประเภทของฟังก์ชัน

ฟังก์ชันที่เราศึกษานั้นสามารถแบ่งออกได้เป็น 3 ประเภทหลัก ๆ ได้แก่

1. ฟังก์ชันจาก A ไป B

บทนิยาม

f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น A และเรนจ์เป็นสับเซตของ B

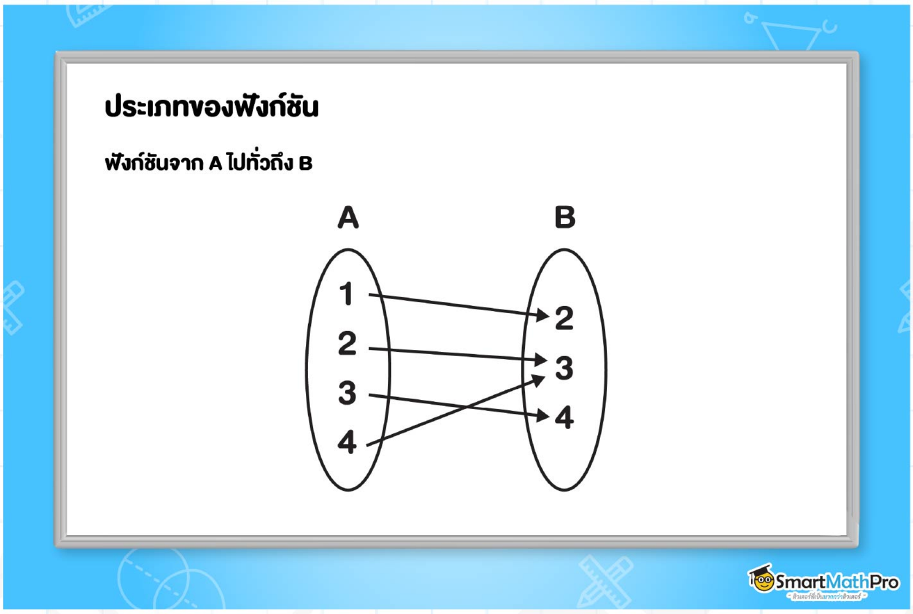


สังเกตได้ว่าฟังก์ชัน จาก A ไป B จะมีสมาชิกตัวหน้าอยู่ใน A และมีสมาชิกตัวหลังอยู่ใน B เสมอ โดยสมาชิกใน A จะถูกใช้ในฟังก์ชันหมดทุกตัว แต่สมาชิกใน B จะถูกใช้ในฟังก์ชันหมดทุกตัวหรือไม่ก็ได้

2. ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B

บทนิยาม

f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น A และเรนจ์เป็น B



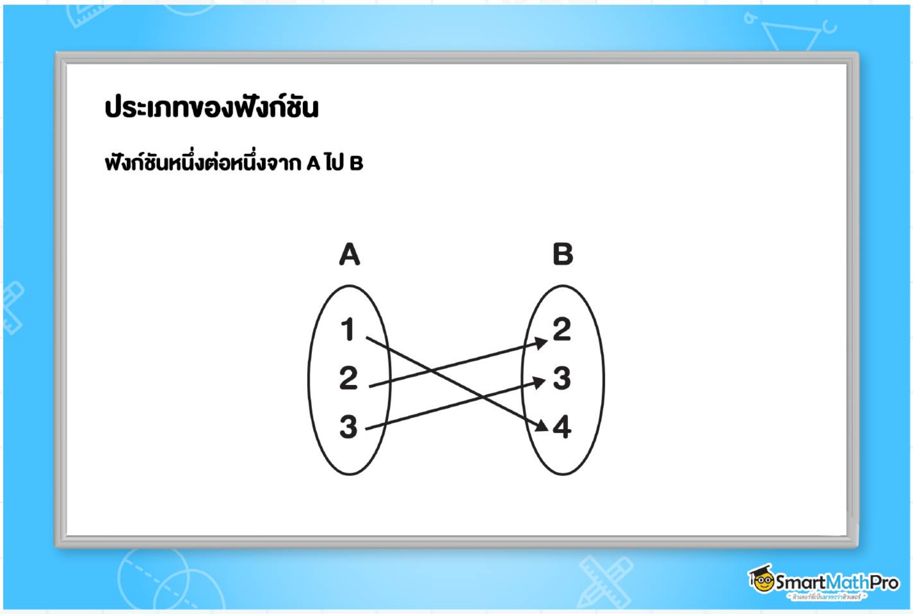
สังเกตได้ว่าฟังก์ชัน จาก A ไปทั่วถึง B สมาชิกทุกตัวใน B จะถูกใช้ในฟังก์ชันทั้งหมด

3. ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B

บทนิยาม

f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ซึ่งสำหรับ x_1 และ x_2 ใด ๆ ใน A ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$

เช่น

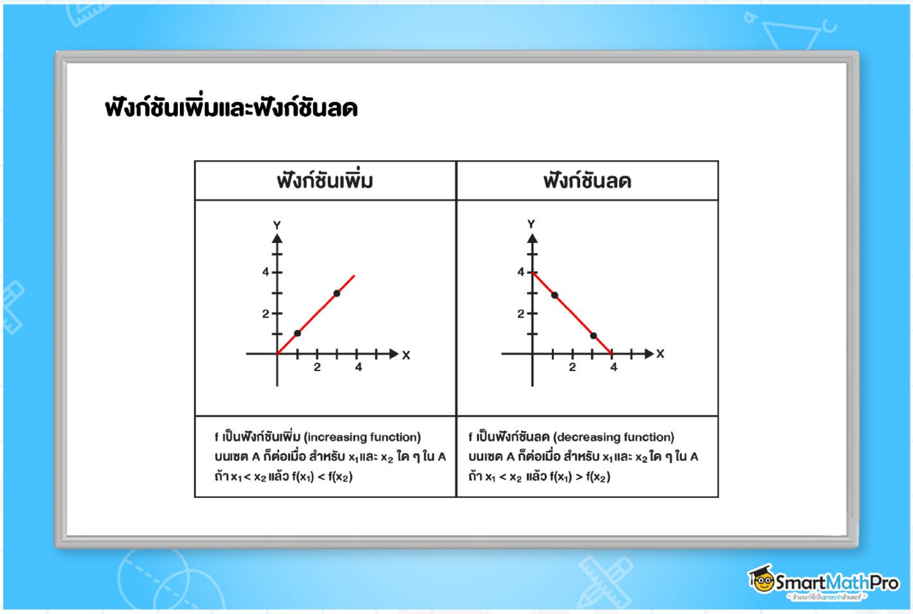


สังเกตได้ว่าฟังก์ชัน 1–1 จาก A ไป B สมาชิกใน B จะถูกใช้ในฟังก์ชันไม่เกิน 1 ตัวเสมอ ซึ่งการตรวจสอบกราฟว่าเป็นฟังก์ชัน 1–1 มั้ย สามารถทำได้โดยลากเส้นในแนวนอน (ขนานแกน X) ให้ตัดกับกราฟ ถ้ามีกรณีใดเกิดจุดตัดระหว่างกราฟและเส้นในแนวนอนมากกว่า 1 จุด กราฟดังกล่าวจะไม่เป็นฟังก์ชัน 1–1

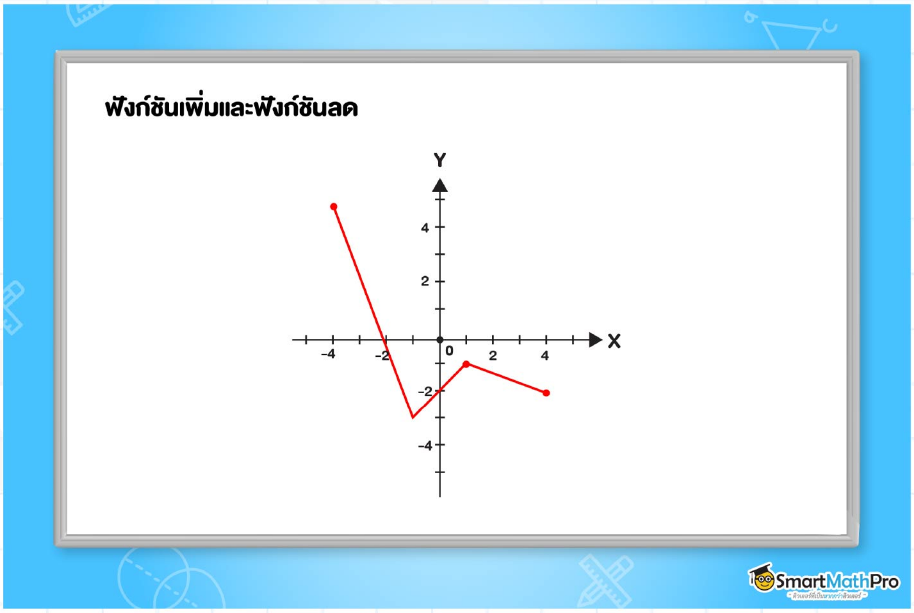
ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด

บทนิยาม

ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง และ A เป็นสับเซตของโดเมน



เช่น ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีกราฟดังรูป



f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[-1, 1]$ และ
f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[-4, -1]$ และ $[1, 4]$

การดำเนินการของฟังก์ชัน

เรารู้จักฟังก์ชันกันมาพอสมควรแล้ว เดี๋ยวเราลองมาสร้างฟังก์ชันใหม่ที่ใช้ฟังก์ชันเดิมเป็นองค์ประกอบดีกว่า เนื่องจาก ฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นเซตของจำนวนที่สามารถบวก ลบ คูณ และหารได้ ดังนั้นเรา จะใช้การดำเนินการต่าง ๆ มาสร้างฟังก์ชันใหม่ดูบ้าง

พีชคณิตของฟังก์ชัน

บทนิยาม

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของ R กำหนดฟังก์ชัน $f+g, f-g, fg$ และ $\frac{f}{g}$ ดังนี้

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ และ $g(x) \neq 0$

ตัวอย่างที่ 5 ให้ $f(x) = 2x+1$ และ $g(x) = x-3$ จงหา $f-g$ และ fg

วิธีทำ เนื่องจากโดเมนของ f คือ $\mathbb{R}$ และโดเมน g คือ $\mathbb{R}$ ดังนั้น

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (2x+1) - (x-3) = 2x+1-x+3 = x+4$$

และ

$$(fg)(x) = \mathrm{f}(x) \cdot g(x) = (2x+1)\cdot(x-3) = 2x^2 - 6x + x - 3 = 2x^2 - 5x - 3$$

ฟังก์ชันประกอบ

บทนิยาม

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันโดยที่ $R_f \cap D_g \neq \varnothing$

ฟังก์ชันประกอบของ f และ g เขียนแทนด้วย $g \circ f$ คือฟังก์ชันที่โดเมน คือ

$$D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

และกำหนด $g \circ f$ โดย

$$g\circ f(x) = g(f(x)) \text{ สำหรับทุก } x \text{ ใน } D_{g\circ f}$$

ตัวอย่างที่ 6 ให้ $f(x) = x - 1$ และ $g(x) = 3x$ จงหา $g \circ f(x)$ และ $f \circ g(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = x - 1$ และ $g(x) = 3x$

จะได้ $g \circ f(x) = g(f(x))$
$= g(x-1)$
$= 3(x-1)$
$= 3x - 3$

และ $f \circ g(x) = f(g(x))$
$= f(3x)$
$= (3x) - 1$
$= 3x - 1$

ฟังก์ชันผกผัน

ในเรื่องตัวผกผันของความสัมพันธ์ เราหาได้จากการสลับสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังของแต่ละคู่อันดับที่เป็นสมาชิกในความสัมพันธ์นั้น ลองคิดดูดี ๆ ฟังก์ชันก็เป็นความสัมพันธ์หนึ่งเช่นกัน ดังนั้นเราจึงสามารถใช้วิธีเดียวกันในการหาได้ แต่ตัวผกผันของฟังก์ชันนั้นไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชันเสมอไป

เช่น $f = \{(3, 4), (6, 4)\}$ เป็นฟังก์ชัน
แต่เราจะได้ $f^{-1} = \{(4, 3), (4, 6)\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน

บทนิยาม

ให้ f เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า f มี มีฟังก์ชันผกผัน ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน 1–1

ตัวอย่างที่ 7 ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชัน 1–1 ซึ่งกำหนดโดย $f(x) = 2x - 1$ จงหาฟังก์ชันผกผัน

วิธีทำ ให้ $f(x) = y$

จะได้ $y = 2x - 1$ ต้องการหาตัวผกผัน (เปลี่ยน x เป็น y และ เปลี่ยน y เป็น x)

จะได้ $x = 2y - 1$ (จัดรูปโดยเขียน y ให้อยู่ในรูปของ x)

จะได้ $y = \frac{x+1}{2}$

ดังนั้น $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$

"เวลาที่ดีที่สุดในการเริ่มต้น คือ **ตอนนี้**"

- พี่ปั้น SmartMathPro -