

จำนวนจริง ม.4

จำนวนจริงคืออะไร ?

จำนวนทุกจำนวนที่รู้จักและสามารถนำมาคำนวณ บวก ลบ คูณ หาร ยกกำลังได้ ไม่ว่าจะเป็นจำนวนเต็ม เศษส่วน ทศนิยม เลขยกกำลัง ตัวเลขที่อยู่ในรูปกรณ์ (ที่เรียกกันติดปากว่า รุท) หรือค่าคงที่อย่าง π ก็เป็นจำนวนจริงเช่นกัน

และเพื่อขอบทวนจำนวนสองชนิด ได้แก่ จำนวนตรรกยะ และจำนวนอตรรกยะ ซึ่งความหมายและตัวอย่างของจำนวนแต่ละชนิดเป็นดังนี้

จำนวนตรรกยะ

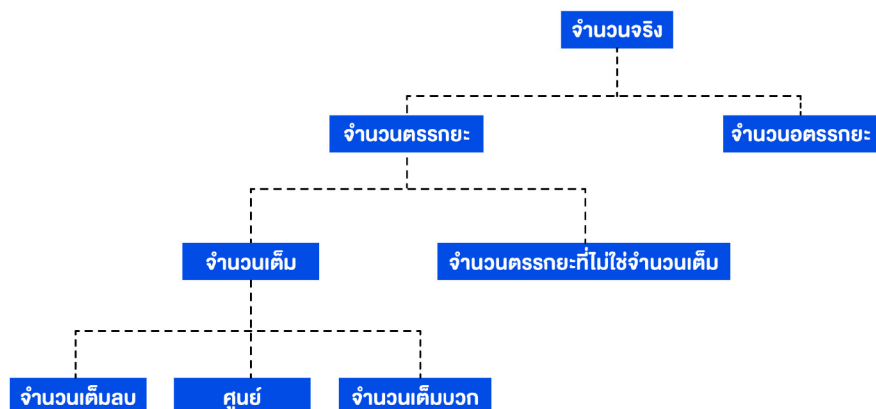
คือ จำนวนที่เขียนในรูป $\frac{a}{b}$ โดย a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $b \neq 0$
นั่นคือจำนวนที่เขียนได้ในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็ม หรือเขียนเป็นทศนิยมซ้ำได้
เช่น $7, 1.5, -\frac{5}{4}, 2.4\bar{3}, 0$

จำนวนอตรรกยะ

คือ จำนวนที่เป็นทศนิยมแบบไม่ซ้ำ (และเป็นทศนิยมไม่รู้จบ ก็คือตัวเลขหลังทศนิยมไม่มีที่สิ้นสุดด้วย) ซึ่งจำนวนชนิดนี้ไม่สามารถเขียนเป็นเศษส่วนของจำนวนเต็มได้
เช่น $\sqrt{2}, 1.121231234 \dots, \pi, \sqrt[3]{4}, 1 - \sqrt{2}$

จะเห็นว่า จำนวนตรรกยะ และจำนวนอตรรกยะ จะมีความแตกต่างกันชัดเจน มีลักษณะที่ตรงข้ามกัน นั่นแปลว่า เซตของจำนวนตรรกยะ และเซตของจำนวนอตรรกยะ จะไม่มีสมาชิกร่วมกันเลย อย่างไรก็ตาม ถ้านำเซตของจำนวนตรรกยะและเซตของจำนวนอตรรกยะมายูเนียน (รวมกัน) เราจะได้ผลลัพธ์จากการยูเนียน คือ เซตของจำนวนจริง โดยจำนวนจริงสามารถแบ่งเป็นจำนวนชนิดต่าง ๆ ดังแผนผังต่อไปนี้

แผนผังแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนชนิดต่าง ๆ



สัญลักษณ์ของเซตของจำนวนจริงชนิดต่าง ๆ ที่ควรรู้จัก ได้แก่

- $\mathbb{N}$ แทนเซตของจำนวนเต็มบวก (จำนวนนับ)
- $\mathbb{Z}$ แทนเซตของจำนวนเต็ม
- $\mathbb{Q}$ แทนเซตของจำนวนตรรกยะ
- $\mathbb{Q}'$ แทนเซตของจำนวนอตรรกยะ
- $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง

ระบบจำนวนจริง

หัวข้อนี้เราจะมาศึกษาเกี่ยวกับโครงสร้างของระบบจำนวนจริงกัน ซึ่งประกอบด้วยเซตของจำนวนจริง และการดำเนินการของจำนวนจริง ประกอบด้วย การบวกและคูณ

แต่ก่อนจะเข้าหัวข้อระบบจำนวนจริง เราต้องมีข้อตกลงร่วมกันหรือสิ่งที่ทุกคนต้องยอมรับแบบไม่ต้องพิสูจน์ว่าจริงหรือไม่กันเสียก่อน เรียกว่า สัจพจน์การเท่ากันของระบบจำนวนจริง ดังนี้

สัจพจน์การเท่ากันของระบบจำนวนจริง

สำหรับจำนวนจริง a, b และ c

1. กฎการสะท้อน (reflexive law)

$$a = a$$

2. กฎการสมมาตร (symmetric law)

$$\text{ถ้า } a = b \text{ แล้ว } b = a$$

3. กฎการถ่ายทอด (transitive law)

$$\text{ถ้า } a = b \text{ และ } b = c \text{ แล้ว } a = c$$

จากที่พี่เขียนไว้ว่าหัวข้อนี้มีการดำเนินการของจำนวนจริงด้วย พี่ก็จะขอพูดถึงสมบัติของการดำเนินการ ได้แก่ สมบัติของการบวกและการคูณของจำนวนจริง ซึ่งมีสมบัติสำคัญทั้งหมดดังนี้

สมบัติของจำนวนจริง

สมบัติ	การบวก	การคูณ
สมบัติปิด	$a + b \in \mathbb{R}$	$a \times b \in \mathbb{R}$
สมบัติสลับที่	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$
สมบัติการเปลี่ยนหมู่	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
สมบัติการมีเอกลักษณ์	เรียก 0 ว่า เอกลักษณ์การบวก	เรียก 1 ว่า เอกลักษณ์การคูณ
สมบัติการมีตัวผกผัน	เรียก $-a$ ว่าตัวผกผันการบวก หรืออินเวอร์สการบวกของ a	ถ้า $a \neq 0$ เรียก $\frac{1}{a}$ ว่าตัวผกผันการคูณ หรืออินเวอร์สการคูณของ a
สมบัติการแจกแจง	$a(b + c) = ab + ac$	

สมบัติข้างต้น โดยเฉพาะสมบัติการสลับที่ สมบัติการเปลี่ยนหมู่ และสมบัติการแจกแจง สามารถช่วยให้หาผลลัพธ์จากการบวกและการคูณของจำนวนจริงทำได้สะดวกขึ้นด้วย อย่างเช่นในตัวอย่างต่อไปนี้

- จงหาผลบวกของ $2 + 8 + 3 + 5 + 2 + 5$

ถ้าเราไม่ใช้สมบัติข้างต้น เราจะต้องดำเนินการบวกจากจำนวนทางซ้ายสุดมาขวาสุด ซึ่งจะไม่สะดวกเลย แต่ถ้าเราใช้สมบัติมาช่วยจะสามารถสลับที่และเพิ่มวงเล็บ (จัดหมู่) จะช่วยให้เราหาผลบวกได้ง่ายขึ้น ดังนี้

$$2 + 8 + 3 + 5 + 2 + 5 = (5 + 5) + (2 + 8) + (2 + 3) = 10 + 10 + 5 = 25$$

- จงหาผลคูณของ $2 \times 8 \times 3 \times 5 \times 2 \times 5$

เราสามารถใช้สมบัติการคูณของจำนวนจริงช่วยในการหาคำตอบได้เช่นเดียวกับตัวอย่างก่อนหน้านี้ ดังนี้

$$2 \times 8 \times 3 \times 5 \times 2 \times 5 = (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (3 \times 8) = 10 \times 10 \times 24 = 2,400$$

พหุนามตัวแปรเดียว

หลายคนอาจจะสงสัยว่ามันเกี่ยวกับจำนวนจริงอย่างไร ? นั่นเป็นเพราะว่านอกจากการบวกลบคูณหารแล้ว เราใช้สมบัติของจำนวนจริงในการหาคำตอบของสมการและอสมการด้วย

โดยที่แต่เดิมเราเคยแก้สมการและอสมการตัวแปรเดียวที่เป็นแบบเชิงเส้น (ตัวแปรไม่ได้มีเลขชี้กำลัง) กันมาบ้าง แต่ในระดับชั้นนี้ เราจะไปไกลขึ้น โดยตัวแปรของเรานั้นมีเลขชี้กำลังได้ นั่นทำให้สมการหรืออสมการจะอยู่ในรูปของพหุนาม

ในหัวข้อนี้ เราก็จะมาทบทวนพหุนาม เน้นที่พหุนามตัวแปรเดียว แล้วต่อยอดว่าพหุนามสามารถทำอะไรได้มากไปกว่าที่เราเคยเรียนรู้มาในคณิต ม.ต้น ซึ่งความรู้เรื่องพหุนามตัวแปรเดียวในหัวข้อนี้ก็จะนำไปใช้ในการแก้สมการและอสมการต่อ

ความหมายของพหุนาม

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนลบ

และ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริง

เรียก $p(x)$ ว่า พหุนามดีกรี

เรียก n ว่า ดีกรี ของ $p(x)$

เรียก $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ ว่า สัมประสิทธิ์ ของ $p(x)$

เรียก a_n ว่า สัมประสิทธิ์นำ

เช่น $q(x) = 3x^2 + 4x + 5$ เป็นพหุนามที่มีดีกรี 2 มีสัมประสิทธิ์เป็น 3, 4 และ 5 และมีสัมประสิทธิ์นำเป็น 3

การดำเนินการของพหุนาม

ในส่วนของการดำเนินการของพหุนาม ซึ่งประกอบด้วย การบวก ลบ คูณ หารพหุนาม
ที่จะขอทบทวนส่วนที่เราเคยเรียนในชั้น ม.ต้นกันก่อน ได้แก่ การบวก ลบ และคูณพหุนาม
ซึ่งเรามาทบทวนผ่านตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1

ให้ $p(x) = x - 2$ และ $q(x) = 2x - 1$ จงหา $p(x) + q(x)$, $p(x) - q(x)$ และ $p(x)q(x)$

วิธีทำ จาก $p(x) = x - 2$ และ $q(x) = 2x - 1$

จะได้

- $p(x) + q(x) = (x - 2) + (2x - 1) = x + 2x - 2 - 1 = 3x - 3$
- $p(x) - q(x) = (x - 2) - (2x - 1) = x - 2x + 2 - 1 = -x + 1$
- $p(x)q(x) = (x - 2)(2x - 1)$
 $= x(2x) + (x)(-1) + (-2)(2x) + (-2)(-1)$
 $= 2x^2 - 5x + 2$

ขั้นตอนวิธีการหารสำหรับพหุนาม

หลังจากที่เราได้ทบทวนการบวก ลบ และคูณพหุนามแล้ว คราวนี้เรามาทำความรู้จักกับการหารพหุนามกันบ้างว่ามีวิธีทำอย่างไร แต่ก่อนอื่น พี่จะพาทุกคนมารู้จักกับองค์ประกอบต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการหารพหุนามว่ามีอะไรบ้าง

ทฤษฎีบท ขั้นตอนวิธีการหารสำหรับพหุนาม

ถ้าพหุนาม $p(x)$ หารด้วยพหุนาม $q(x)$ โดยที่ $q(x) \neq 0$ แล้วจะมีพหุนาม $a(x)$ และ $r(x)$ เพียงชุดเดียวเท่านั้น ซึ่ง $p(x) = q(x)a(x) + r(x)$ โดย $r(x) = 0$ หรือ ดีกรีของ $r(x)$ มีค่าน้อยกว่าดีกรีของ $a(x)$

จากทฤษฎีข้างต้นสรุปง่าย ๆ ว่า

$$\text{ตัวตั้ง} = (\text{ตัวหาร})(\text{ผลหาร}) + \text{เศษเหลือ}$$

การหารยาว

การหารพหุนามนั้นมิได้หลายวิธี เช่น วิธีการหารยาว วิธีเทียบสัมประสิทธิ์ วิธีการหารสังเคราะห์ ฯลฯ แต่พี่จะขอพูดถึงเฉพาะการหารยาวนะ ซึ่งการหารยาวของพหุนามสามารถทำได้โดยวิธีการตั้งหารคล้ายรูปแบบการหารยาวของจำนวนเต็มดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2

จงหาผลหารและเศษเหลือจากการหาร $p(x) = x^2 - 3x + 2$ ด้วย $q(x) = x - 4$

วิธีทำ

$$\begin{array}{r} x \\ x-4 \overline{) x^2 - 3x + 2} \\ \underline{x^2 - 4x} \downarrow \\ x + 2 \end{array}$$

1. จัดตำแหน่งของตัวตั้ง และตัวหารเหมือนกับการหารยาวของจำนวนเต็มโดยเรียงเลขชี้กำลังจากมากไปน้อยทั้งตัวตั้ง และตัวหาร
2. หาตัวที่คูณกับ x แล้วได้ x^2 นั่นก็คือ x
3. หาผลคูณของ $x(x - 4)$
4. เอาผลที่ได้จากข้อที่ 3 ตั้งในบรรทัดถัดไปแล้วนำไปลบออกจาก $x^2 - 3x$ ที่อยู่ด้านบน
5. ดึงพจน์ถัดไปลงมา

$$\begin{array}{r}
 x+1 \\
 x-4 \overline{) x^2 - 3x + 2} \\
 \underline{x^2 - 4x} \\
 x+2 \\
 \underline{x-4} \\
 6
 \end{array}$$

6. หาตัวที่คูณกับ x แล้วได้ x นั่นก็คือ 1
7. เอาผลคูณของ $(1)(x - 4)$ ตั้งในบรรทัดถัดไปแล้วนำไปลบออกจาก $x + 2$ ที่อยู่ด้านบน จะได้ $x^2 - 3x + 2 = (x - 4)(x + 1) + 6$

ดังนั้น ผลหารคือ $(x + 1)$ และเหลือเศษคือ 6

ตัวอย่างที่ 3

จงหาผลหารและเศษเหลือจากการหารพหุนาม $3x^2 + 8$ ด้วย $x - 2$

เทคนิค : ในกรณีที่กำลังเรียงพจน์ของพหุนามตามเลขชี้กำลังจากมากไปน้อย แล้วมีพจน์บางพจน์หายไปให้เติม 0 คูณกับ x ยกกำลังเลขที่หายไป

วิธีทำ

$$\begin{array}{r}
 3x+6 \\
 x-2 \overline{) 3x^2 + 0x + 8} \\
 \underline{3x^2 - 6x} \\
 6x + 8 \\
 \underline{6x - 12} \\
 20
 \end{array}$$

ดังนั้น ผลหาร คือ $3x + 6$ และเหลือเศษคือ 20

การแยกตัวประกอบของพหุนาม

เรื่องหนึ่งที่สำคัญของพหุนาม คือ การแยกตัวประกอบของพหุนาม ซึ่งเป็นส่วนสำคัญทั้งการจัดรูปพหุนามให้อยู่ในรูปอย่างง่าย รวมถึงเป็นวิธีการหลักในการแก้สมการและอสมการพหุนาม

ซึ่งในชั้นม.ต้น เราได้ทำการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองรวมถึงพหุนามดีกรีสูงกว่าสองที่มีรูปแบบเฉพาะมาแล้ว สำหรับชั้นม.ปลายนี้เนื้อหาที่เราเรียนก็จะเพิ่มขึ้นนะ โดยเราจะได้เรียนการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสูงกว่าสองแต่ไม่ได้มีรูปแบบเฉพาะ โดยใช้ทฤษฎีที่สำคัญอยู่ 2 ทฤษฎี ได้แก่ ทฤษฎีบทเศษเหลือและทฤษฎีบทตัวประกอบตรรกยะ

ทฤษฎีบทเศษเหลือ

ถ้าหารพหุนาม $p(x)$ ด้วยพหุนาม $x - c$ แล้วเศษเหลือจะเท่ากับ $p(c)$

ตัวอย่างที่ 4

จงหาเศษเหลือของ หารด้วย $3x^2 + 1$ ด้วย $x - 1$

วิธีทำ ให้ $p(x) = 3x^2 + 1$

จากทฤษฎีบทเศษเหลือ เมื่อหาร $p(x)$ ด้วย $x - 1$ จะได้เศษเหลือ คือ $p(1)$

จะได้ $p(1) = 3(1)^2 + 1 = 4$

ดังนั้น เศษเหลือของ $3x^2 + 1$ หารด้วย $x - 1$ คือ 4

จาก ทฤษฎีบทเศษเหลือ ถ้าเราหาค่า c ที่ทำให้ $p(c)$ เป็น 0 นั่นคือการหารนั้นจะมีเศษเหลือจากการหารเป็น 0 ซึ่งการที่เศษเป็น 0 ก็คือการหารลงตัวนั่นเอง ซึ่งถ้าหารลงตัวแล้วแสดงว่า $x - c$ จะเป็นหนึ่งในตัวประกอบของ $p(x)$ เราสามารถกล่าวเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบทตัวประกอบ

พหุนาม $p(x)$ มีพหุนาม $x - c$ เป็นตัวประกอบก็ต่อเมื่อ $p(c) = 0$

ตัวอย่างที่ 5

จงตรวจสอบว่า $x - 1$ เป็นตัวประกอบของ $x^2 + 2x - 8$ หรือไม่

วิธีทำ ให้ $p(x) = x^2 + 2x - 8$

ดังนั้น $p(1) = (1)^2 + 2(1) - 8 = -5$ ซึ่งไม่เท่ากับ 0

จึงสรุปได้ว่า $x - 1$ ไม่เป็นตัวประกอบของ $x^2 + 2x - 8$

ทฤษฎีบทตัวประกอบตรรกยะ

ให้ $p(x)$ แทนพหุนาม $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$ โดยที่ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $a_n \neq 0$

ถ้า $x - \frac{k}{m}$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม $p(x)$ โดยที่ m และ k เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $m \neq 0$ และ ห.ร.ม. ของ m และ k เท่ากับ 1

แล้ว m หาร a_n ลงตัว และ k หาร a_0 ลงตัว

ตัวอย่างที่ 6

จงแยกตัวประกอบของ $p(x) = 2x^2 + 5x - 3$

วิธีทำ ให้ $p(x) = 2x^2 + 5x - 3$

เนื่องจากจำนวนเต็มที่หาร -3 ลงตัว คือ $\pm 1, \pm 3$

และจำนวนเต็มที่หาร 2 ลงตัว คือ $\pm 1, \pm 2$

ดังนั้น จำนวนตรรกยะ $\frac{k}{m}$ ที่ทำให้ $p\left(\frac{k}{m}\right) = 0$ จะอยู่ในกลุ่มของจำนวนต่อไปนี้

คือ $\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$

พิจารณา $p\left(\frac{1}{2}\right)$

จะได้ว่า $p\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{2}\right) - 3 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} - 3 = 0$

นั่นคือ $x - \frac{1}{2}$ เป็นตัวประกอบของ $p(x)$

นำ $x - \frac{1}{2}$ ไปหาร $p(x)$ ได้ผลหารเป็น $2x + 6$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น } 2x^2 + 5x - 3 &= \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x + 6) \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)(2)(x + 3) \\ &= (2x - 1)(x + 3)\end{aligned}$$

จากตัวอย่างข้างต้น นื่อง ๆ บางคนที่ยังสงสัยอยู่ว่า จำนวน $\pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$ เหล่านี้มาจากไหน
ที่จะขอสรุปไว้ข้างท้ายนี้อีกครั้งว่า ตัวเศษได้มาจากตัวประกอบของ -3 และตัวส่วนได้มาจาก
ตัวประกอบของ 2 โดย ห.ร.ม. ของตัวเศษและตัวส่วน คือ 1

สมการพหุนาม

คราวนี้ก็มาถึงเวลาที่เรานำความรู้ทั้งจำนวนจริงและพหุนามมาใช้ในการแก้สมการกันแล้ว เราเคยผ่านการแก้สมการมาตั้งแต่ชั้นประถม และในม.ต้นเราได้แก้สมการกำลังสองด้วย ในม.ปลายเราจะแก้สมการที่ตัวแปรมีเลขชี้กำลังที่มากขึ้น แต่เราจะใช้หลักการแก้สมการกำลังสอง ร่วมกับทฤษฎีบทตัวประกอบในหัวข้อก่อน สำหรับหลักการแก้สมการพหุนาม (ทั้งกำลังสองและกำลังที่สูงกว่าสอง) วิธีหลัก ๆ ที่นิยมใช้กันคือวิธีการแยกตัวประกอบ และอีกวิธีคือการใช้สูตร

ตัวอย่างที่ 7

จงหาค่าของ x เมื่อ $x^2 + 3x - 54 = 0$

วิธีทำ ทำการแยกตัวประกอบพหุนาม

$$x^2 + 3x - 54 = 0$$

$$(x - 6)(x + 9) = 0$$

$$\text{จะได้ } x - 6 = 0 \text{ หรือ } x + 9 = 0$$

ดังนั้น $x = 6, -9$

ตัวอย่างข้างต้นคือวิธีการแยกตัวประกอบ ส่วนการใช้สูตรจะมีสูตรและตัวอย่างการใช้ดังนี้

สูตรการแก้สมการกำลังสอง

สำหรับสมการกำลังสอง $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ $a \neq 0$

$$\text{จะได้ว่า } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

และ $b^2 - 4ac > 0$ จะมีจำนวนจริงที่เป็นคำตอบของสมการนี้ 2 คำตอบ

$b^2 - 4ac = 0$ จะมีจำนวนจริงที่เป็นคำตอบของสมการนี้ 1 คำตอบ

$b^2 - 4ac < 0$ ไม่มีจำนวนจริงที่เป็นคำตอบของสมการนี้

ตัวอย่างที่ 8

จงหาเซตคำตอบของสมการ $x^2 - 6x + 9 = 0$

วิธีทำ เทียบสัมประสิทธิ์ $ax^2 + bx + c = 0$ กับ $x^2 - 6x + 9 = 0$

จะได้ $a = 1, b = -6$ และ $c = 9$

ซึ่ง $(-6)^2 - 4(1)(9) = 0$ ดังนั้นสมการพหุนามนี้มีเพียงคำตอบเดียวนั้น คือ

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\&= \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2(1)} = 3\end{aligned}$$

ดังนั้น $x = 3$

จะได้เซตคำตอบของสมการนี้คือ $\{3\}$

ตัวอย่างที่ 9

จงหาเซตคำตอบของสมการ $2x^2 + 3x + 4 = 0$

วิธีทำ เทียบสัมประสิทธิ์ $ax^2 + bx + c = 0$ กับ $2x^2 + 3x + 4 = 0$

จะได้ $a = 2, b = 3$ และ $c = 4$

ซึ่ง $(3)^2 - 4(2)(4) < 0$ ดังนั้นสมการพหุนามนี้ไม่มีจำนวนจริงที่เป็นคำตอบ

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้คือ เซตว่าง

เศษส่วนของพหุนาม

ก่อนอื่น เรามารู้จักกับกับ เศษส่วนของพหุนามกันว่าเป็นอะไร

บทนิยาม

ให้ $p(x)$ และ $q(x)$ เป็นพหุนาม โดยที่ $q(x) \neq 0$ จะเรียก $\frac{p(x)}{q(x)}$ ว่า เศษส่วนของพหุนาม ที่มี $p(x)$ เป็นตัวเศษ และ $q(x)$ เป็นตัวส่วน

จากบทนิยาม เศษส่วนของพหุนามก็คือ เศษส่วนที่มีตัวเศษและตัวส่วนเป็นพหุนามนั่นเอง เหมือนเอาเศษส่วนและพหุนามมารวมตัวกัน ดังนั้น เศษส่วนของพหุนามก็จะสามารถใช้สมบัติต่าง ๆ ของเศษส่วน และสมบัติต่าง ๆ ของพหุนามมาใช้ในการคำนวณ จัดรูป รวมถึงนำไปใช้แก้สมการและอสมการได้

การดำเนินการของเศษส่วนของพหุนาม

การดำเนินการของเศษส่วนของพหุนามนั้นมีวิธีทำคล้ายคลึงกับการดำเนินการของเศษส่วนจำนวนเต็ม คือมีวิธีการบวก ลบ คูณ และหารเหมือนเศษส่วนที่เราเคยรู้จัก แล้วบางข้ออาจใช้การแยกตัวประกอบของพหุนามในการจัดรูปร่วมด้วย ตามตัวอย่างด้านล่างนี้เลย

ตัวอย่างที่ 10

กำหนดให้ $p(x) = \frac{x+4}{2}$ และ $q(x) = \frac{1}{x+3}$

จงหา $p(x) + q(x)$, $p(x) - q(x)$, $p(x)q(x)$ และ $\frac{p(x)}{q(x)}$

วิธีทำ จาก $p(x) = \frac{x+4}{2}$ และ $q(x) = \frac{1}{x+3}$

$$\begin{aligned}\text{จะได้} \quad p(x) + q(x) &= \frac{x+4}{2} + \frac{1}{x+3} \\ &= \frac{(x+4)(x+3) + (2)(1)}{(2)(x+3)}\end{aligned}$$

$$= \frac{x^2 + 7x + 14}{2x + 6}$$

$$\begin{aligned}p(x) - q(x) &= \frac{x+4}{2} - \frac{1}{x+3} \\ &= \frac{(x+4)(x+3) - (2)(1)}{(2)(x+3)}\end{aligned}$$

$$= \frac{x^2 + 7x + 10}{2x + 6}$$

$$\begin{aligned}p(x)q(x) &= \left(\frac{x+4}{2}\right)\left(\frac{1}{x+3}\right) \\ &= \frac{(x+4)(1)}{(2)(x+3)} \\ &= \frac{x+4}{2x+6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{q(x)} &= \left(\frac{x+4}{2}\right) \div \left(\frac{1}{x+3}\right) \\ &= \left(\frac{x+4}{2}\right)\left(\frac{x+3}{1}\right) \\ &= \frac{x^2 + 7x + 12}{2}\end{aligned}$$

สมการเศษส่วนพหุนาม

การแก้สมการเศษส่วนพหุนามนั้นใช้หลักการแก้สมการพหุนามเหมือนเดิม เพิ่มเติมคือตัวส่วนต้องไม่เป็น 0

ตัวอย่างที่ 11

จงหาเซตคำตอบของสมการ $\frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + 3x - 4} = 0$

วิธีทำ จาก $\frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + 3x - 4} = 0$

จะได้ $\frac{(x+4)(x+3)}{(x+4)(x-1)} = 0$

จะได้ $(x+4)(x+3) = 0$ และ $(x+4)(x-1) \neq 0$

นั่นคือ $x = -3$ หรือ $x = -4$ โดยที่ $x \neq 1$ และ $x \neq -4$

ดังนั้น $x = -3$

จะได้เซตคำตอบของสมการ คือ $\{-3\}$

มาสรุปแนวคิดการแก้ปัญหาในตัวอย่างข้างต้นกันอีกครั้ง เราจะแยกตัวประกอบแล้วหาค่า x แต่ละตัวแล้วดูเงื่อนไขว่า x ไม่สามารถเป็นอะไรได้ และตัดคำตอบที่ทำให้ตัวส่วนเป็น 0 ทิ้ง

การไม่เท่ากันของจำนวนจริง

พื้ขอพูดถึงส่วนของ “การไม่เท่ากัน” บ้าง โดยในส่วนนี้จะมีความสัมพันธ์อื่น ๆ ที่น้อง ๆ ต้องรู้จักเพิ่มนอกจากเท่ากับ ได้แก่ มากกว่า “ $>$ ” น้อยกว่า “ $<$ ” มากกว่าหรือเท่ากับ “ $\geq$ ” น้อยกว่าหรือเท่ากับ “ $\leq$ ”

ในส่วนของสัจพจน์เชิงคณิตศาสตร์ของระบบจำนวนจริงเกี่ยวกับ “การเท่ากัน” เราได้กล่าวไปแล้ว ในหัวข้อนี้เราจะลองพูดถึงสัจพจน์ของการไม่เท่ากันของระบบจำนวนจริงดูบ้าง ซึ่งจะมีอยู่ 3 ข้อ ตามนี้

สำหรับ $a \in R$ และ $b \in R$

1. ถ้า $a > 0$ และ $b > 0$ แล้ว $a + b > 0$

(จำนวนจริงบวก 2 ตัวบวกกันจะได้จำนวนจริงบวก)

2. ถ้า $a > 0$ และ $b > 0$ แล้ว $ab > 0$

(จำนวนจริงบวก 2 ตัวคูณกันจะได้จำนวนจริงบวก)

3. $a = 0$ หรือ $a > 0$ และ $a < 0$ เพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง

(จำนวนจริงไม่สามารถมีค่าเป็นบวก ลบ หรือ 0 พร้อมกันได้)

ถ้า $a \in R^+$ แสดงว่า a เป็นจำนวนจริงบวก หรือหมายความว่า $a > 0$ นั้นเอง เรามาดูบทนิยามที่เกี่ยวกับการไม่เท่ากันของจำนวนจริงกันดีกว่า

บทนิยาม

ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง

- $a > b$ หมายถึง $a - b > 0$
- $a < b$ หมายถึง $a - b < 0$ (หรือ $b - a > 0$)
- $a \geq b$ หมายถึง $a > b$ หรือ $a = b$
- $a \leq b$ หมายถึง $a < b$ หรือ $a = b$

จากบทนิยามที่ได้กล่าวมาอาจจะยังนำไปใช้ประโยชน์โดยตรงได้ไม่เยอะมากนัก นักคณิตศาสตร์เลยนำบทนิยามดังกล่าวไปต่อยอดมาเป็นทฤษฎีบทให้เราสามารถใช้ได้อีกมากมายเลย เราลองไปดูทฤษฎีบทที่สำคัญ ๆ ของเรื่องนี้กัน

ทฤษฎีบท

ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง

สมบัติการถ่ายทอด

ถ้า $a > b$ และ $b > c$ แล้ว $a > c$

สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน

ถ้า $a > b$ แล้ว $a + c > b + c$

สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากันที่ไม่เป็นศูนย์

กรณีที่ 1: ถ้า $a > b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac > bc$

กรณีที่ 2: ถ้า $a > b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac < bc$

สมบัติการตัดออกสำหรับการบวก

ถ้า $a + b > b + c$ แล้ว $a > c$

สมบัติการตัดออกสำหรับการคูณ

กรณีที่ 1: ถ้า $ac > bc$ และ $c > 0$ แล้ว $a > b$

กรณีที่ 2: ถ้า $ac > bc$ และ $c < 0$ แล้ว $a < b$

จากทฤษฎีบทข้างบนนี้ สิ่งที่น่าจะต้องระวังเป็นพิเศษเลยก็คือ หลังจากคูณหรือหารด้วยจำนวนจริงลบตลอดทั้งสมการแล้ว อย่าลืมกลับเครื่องหมายสมการด้วย

ทฤษฎีบท

ให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง

ถ้า $a > b$ และ $c > d$ แล้ว $a + c > b + d$

แสดงว่า ถ้าเราสามารถนำสองอสมการมาบวกกันได้เลยตามทฤษฎีบท ยกตัวอย่างเช่น
ถ้า $x > 5$ และ $y > 2$ จะได้ว่า $x + y > 7$

บทนิยาม

ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$a < b < c$ หมายถึง $a < b$ และ $b < c$

$a \leq b \leq c$ หมายถึง $a \leq b$ และ $b \leq c$

$a < b \leq c$ หมายถึง $a < b$ และ $b \leq c$

$a \leq b < c$ หมายถึง $a \leq b$ และ $b < c$

อสมการพหุนามตัวแปรเดียว

เรื่อง “ช่วง” หมายถึง ลับเซตของเซตจำนวนจริง โดยมีบทนิยามดังนี้

บทนิยาม

ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a < b$

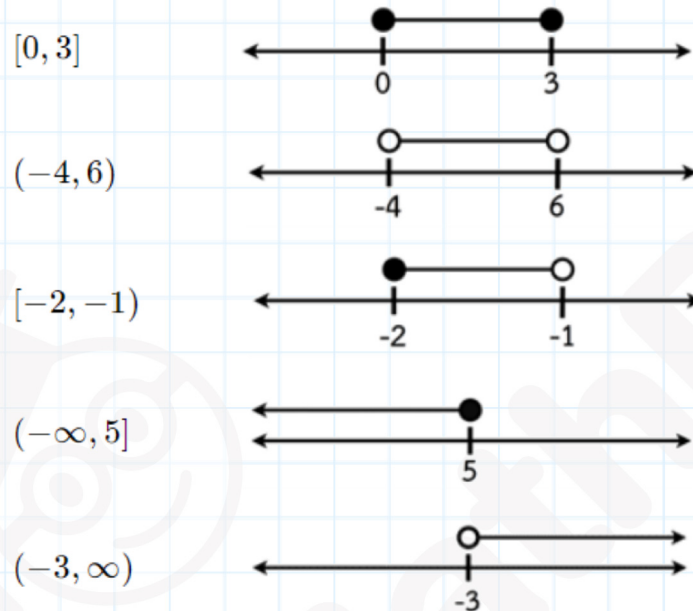
- ช่วงเปิด (a, b) หมายถึง เซต $\{x | a < x < b\}$
- ช่วงปิด $[a, b]$ หมายถึง เซต $\{x | a \leq x \leq b\}$
- ช่วงครึ่งเปิดหรือช่วงครึ่งปิด $(a, b]$ หมายถึง เซต $\{x | a < x \leq b\}$
- ช่วงครึ่งเปิดหรือช่วงครึ่งปิด $[a, b)$ หมายถึง เซต $\{x | a \leq x < b\}$
- ช่วงเปิดอนันต์ (a, ∞) หมายถึง เซต $\{x | x > a\}$
- ช่วงเปิดอนันต์ $(-\infty, a)$ หมายถึง เซต $\{x | x < a\}$
- ช่วงปิดอนันต์ $[a, \infty)$ หมายถึง เซต $\{x | x \geq a\}$
- ช่วงปิดอนันต์ $(-\infty, a]$ หมายถึง เซต $\{x | x \leq a\}$

หมายเหตุ : เซตของจำนวนจริงสามารถเขียนในรูปช่วง $(-\infty, \infty)$ แทนได้

การเขียนช่วง

จากสัญลักษณ์ของช่วงต่าง ๆ ตามนิยามข้างต้น เราสามารถเขียนแทนจำนวนลงบนเส้นจำนวนได้ตามตัวอย่างต่อไปนี้เลย

ตัวอย่างที่ 12



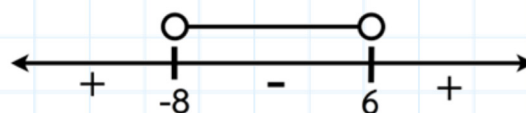
อสมการพหุนามตัวแปรเดียว

อสมการ คือ ประโยคในทางคณิตศาสตร์ที่กล่าวถึงการไม่เท่ากัน เช่น $10 > 8$ คืออสมการที่เป็นจริง หรือ $-10 \leq -20$ คืออสมการที่เป็นเท็จ เป็นต้น แต่ในกรณีที่อสมการมีตัวแปรรออยู่ด้วย เช่น $3x + 2 > 8$ หรือ $x^2 - 9 \leq 0$ เราจะมาหาว่าจำนวนจริงตัวไหนบ้างนะที่แทนลงในอสมการนี้แล้ว ทำให้อสมการเป็นจริง โดยจำนวนจริงเหล่านี้เราจะเขียนในรูปของ“เซตคำตอบของอสมการ”

ตัวอย่างที่ 13

จงหาเซตคำตอบของอสมการ $x^2 + 2x - 48 < 0$

วิธีทำ จาก $x^2 + 2x - 48 < 0$
แยกตัวประกอบได้ $(x + 8)(x - 6) < 0$
สามารถเขียนช่วงคำตอบของ $(x + 8)(x - 6) < 0$ ได้ดังนี้



ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการ $x^2 + 2x - 48 < 0$ คือช่วง $(-8, 6)$ หรือ $\{x | -8 < x < 6\}$

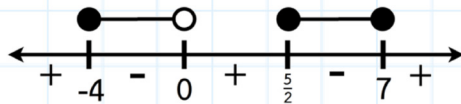
ตัวอย่างที่ 14

จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\frac{(x+4)(2x-5)(7-x)}{x} \geq 0$

วิธีทำ จาก $\frac{(x+4)(2x-5)(7-x)}{x} \geq 0$

คูณด้วย -1 ตลอด $\frac{(x+4)(2x-5)(x-7)}{x} \leq 0$ ** คูณด้วยตัวติดลบอย่าลืมกลับเครื่องหมายอสมการ

สามารถเขียนช่วงคำตอบของ $\frac{(x+4)(2x-5)(x-7)}{x} \leq 0$ ได้ดังนี้



ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการ $\frac{(x+4)(2x-5)(7-x)}{x} \geq 0$ คือช่วง $[-4, 0) \cup \left[\frac{5}{2}, 7\right]$

ค่าสัมบูรณ์

ค่าสัมบูรณ์

บทนิยาม

ให้ a เป็นจำนวนจริง ค่าสัมบูรณ์ (absolute value) ของจำนวนจริง a เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $|a|$ โดยที่

$$|a| = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } a \geq 0 \\ -a & \text{เมื่อ } a < 0 \end{cases}$$

หมายเหตุ

- จากบทนิยาม ในกรณีที่ $a < 0$ (a เป็นจำนวนลบ) จะได้ $-a > 0$
(ค่าลบของจำนวนลบจะได้จำนวนบวก) แสดงว่า $|a| = -a$ ซึ่งเป็นจำนวนเต็มบวก
ดังนั้น สำหรับจำนวนจริง a จะได้ว่า $|a|$ มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ โดย $|a|$ จะเท่ากับ 0 เมื่อ $a = 0$
- ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง a สามารถพิจารณาเป็นระยะจากจุดที่แทน 0 ถึงจุดที่แทน a บนเส้นจำนวน

ทฤษฎีบท

ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. $|x| = |-x|$
2. $|xy| = |x||y|$
3. $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$
4. $|x - y| = |y - x|$
5. $|x|^2 = x^2$
6. $|x + y| \leq |x| + |y|$

สมการค่าสัมบูรณ์ของพหุนามตัวแปรเดียว

ในหัวข้อนี้เราจะมาแก้สมการค่าสัมบูรณ์ของพหุนามกัน นื่อง ๆ น่าจะเคยมีประสบการณ์ในการแก้สมการมาในหลายรูปแบบแล้ว เช่น สมการเส้นตรง สมการกำลังสองตัวแปรเดียว ซึ่งวิธีหนึ่งที่ใช้ในการหาคำตอบของสมการได้ก็คือการแทนค่าหรือจำนวนลงในตัวแปรแล้วทำให้สมการเป็นจริง

นื่อง ๆ คิดว่า ถ้าเราต้องการหาคำตอบของสมการค่าสัมบูรณ์ จะต้องมีการอย่างไรดี

ลองดูสมการง่าย ๆ เช่น $|x| = 3$ ถ้าเราลองแทนค่า x ด้วย 3 สมการนี้จะเป็นจริง ถ้าเราลองแทนค่า x ด้วย -3 สมการนี้ก็ยังคงเป็นจริงอยู่เช่นกัน แต่ถ้าลองแทนค่า x ด้วยจำนวนอื่น ๆ จะได้ว่าไม่มีจำนวนใดเลยนอกจากนี้ที่ทำให้สมการเป็นจริง ดังนั้น คำตอบทั้งหมดของสมการ $|x| = 3$ คือ 3 และ -3

ทฤษฎีบท

ให้ a เป็นจำนวนจริงบวก

เซตคำตอบของสมการ $|x| = a$ คือ $\{-a, a\}$

สรุปง่าย ๆ คือ $|x| = a$ ก็ต่อเมื่อ $x = a$ หรือ $x = -a$ ตามตัวอย่างด้านล่างนี้

ตัวอย่างที่ 15

จงหาเซตคำตอบของสมการ $|2x + 3| = 9$

วิธีทำ จากทฤษฎีบท จะได้ว่า $2x + 3 = 9$ หรือ $2x + 3 = -9$

$$2x = 6 \quad \text{หรือ} \quad 2x = -12$$
$$x = 3 \quad \text{หรือ} \quad x = -6$$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ $|2x + 3| = 9$ คือ $\{-6, 3\}$

จากตัวอย่างด้านบน แດ่นอง ๆ พิจารณาที่ $x = a$ และ $x = -a$ ก็จะได้คำตอบเลย
แต่ถ้าในกรณีทีนอกเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ติดตัวแปร เราไม่แน่ใจว่าจะนอกเครื่องหมาย
ค่าสัมบูรณ์จะมีค่าเป็นบวก หรือมีค่าเป็นลบ เราจึงต้องพิจารณาทุกกรณีในการถอด
เครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ที่จะเป็นไปได้นั่นเอง ลองไปดูในตัวอย่างถัดไปกัน

ตัวอย่างที่ 16

จงหาเซตคำตอบของสมการ $|x - 1| = 2x - 3$

แนวคิด เราจะพิจารณาในกรณีที่ $x - 1 \geq 0$ และ $x - 1 < 0$

วิธีทำ กรณีที่ 1

$$x - 1 \geq 0 \text{ นั่นคือ } x \geq 1$$

$$\text{จะได้ } x - 1 = 2x - 3$$

$$-1 + 3 = 2x - x$$

$$x = 2 \text{ ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไข } 2 \geq 1$$

นั่นคือ 2 เป็นคำตอบของสมการ

กรณีที่ 2

$$x - 1 < 0 \text{ นั่นคือ } x < 1$$

$$\text{จะได้ } -(x - 1) = 2x - 3$$

$$-x + 1 = 2x - 3$$

$$1 + 3 = 2x - x$$

$$4 = 3x$$

$$x = \frac{4}{3} \text{ ซึ่งขัดแย้งเงื่อนไข } x < 1$$

นั่นคือ $\frac{4}{3}$ ไม่ใช่คำตอบของสมการ

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ $|x - 1| = 2x - 3$ คือ $\{2\}$

จากตัวอย่างนี้น้องๆ จะเห็นว่า หลังจากที่เราได้คำตอบมาแล้ว ก็ยังไม่สามารถตอบได้ทันที

เราต้องนำเงื่อนไขที่กำหนดไว้มาพิจารณาร่วมด้วยและในตัวอย่างถัดไปเราจะมาดูสมการค่าสัมบูรณ์ที่ทั้งสองข้างอยู่ในรูปค่าสัมบูรณ์กันบ้าง

ตัวอย่างที่ 17

จงหาเซตคำตอบของสมการ $|x - 1| = |2x + 1|$

แนวคิด เราจะใช้วิธียกกำลังทั้งสองข้างของสมการมาช่วยแก้กันดีกว่า

วิธีทำ จาก $|x - 1| = |2x + 1|$

$$\text{ยกกำลังสองทั้งสองข้าง} \quad |x - 1|^2 = |2x + 1|^2$$

$$(x - 1)^2 - (2x + 1)^2 = 0$$

$$[(x - 1) - (2x + 1)][(x - 1) + (2x + 1)] = 0$$

$$(-x - 2)(3x) = 0$$

$$\text{จะได้ } -x - 2 = 0 \quad \text{หรือ} \quad 3x = 0$$

$$x = -2 \quad \text{หรือ} \quad x = 0$$

ตรวจคำตอบ

$$\text{แทน } x = 0 \text{ ลงในสมการ } |x - 1| = |2x + 1|$$

$$\text{จะได้} \quad |0 - 1| = |2(0) + 1|$$

$$|-1| = |1|$$

$$1 = 1 \quad \text{เป็นจริง}$$

$$\text{แทน } x = -2 \text{ ลงในสมการ } |x - 1| = |2x + 1|$$

$$\text{จะได้} \quad |-2 - 1| = |2(-2) + 1|$$

$$|-3| = |-3|$$

$$3 = 3 \quad \text{เป็นจริง}$$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ $|x - 1| = |2x + 1|$ คือ $\{-2, 0\}$

อสมการค่าสัมบูรณ์ของพหุนามตัวแปรเดียว

เราได้ลองแก้สมการค่าสัมบูรณ์ไปเป็นที่เรียบร้อยแล้ว จะเห็นได้ว่า วิธีการแก้สมการค่าสัมบูรณ์นั้น มีความแตกต่างจากการแก้สมการที่เราเคยเจอมา ที่นี่เราก็จะมาดูกันว่า การแก้สมการค่าสัมบูรณ์ มีความแตกต่างกับการแก้สมการทั่วไป อย่างไรบ้าง

การแก้สมการในรูปค่าสัมบูรณ์

ทฤษฎีบท

ให้ a เป็นจำนวนจริงบวก

1. $|x| < a$ ก็ต่อเมื่อ $-a < x < a$
2. $|x| \leq a$ ก็ต่อเมื่อ $-a \leq x \leq a$
3. $|x| > a$ ก็ต่อเมื่อ $x < -a$ หรือ $x > a$
4. $|x| \geq a$ ก็ต่อเมื่อ $x \leq -a$ หรือ $x \geq a$

เพื่อเพิ่มความเข้าใจในทฤษฎีบท เราลองมาดูตัวอย่างกัน

ตัวอย่างที่ 18

จงหาเซตคำตอบของอสมการ $|2x + 3| < 9$

วิธีทำ จากทฤษฎีบทจะได้ว่า $-9 < 2x + 3 < 9$
 $-9 - 3 < 2x + 3 - 3 < 9 - 3$
 $-12 < 2x < 6$
 $-6 < x < 3$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการ คือ $\{x | -6 < x < 3\}$ หรือ $(-6, 3)$

นอกจากอสมการที่มีจำนวนเต็มแล้ว เราจะมาดูอสมการที่ติดตัวแปรทั้งสองฝั่งว่ามีวิธีแก้โจทย์อย่างไร

ตัวอย่างที่ 19

จงหาเซตคำตอบของอสมการ $|x + 1| > x - 3$

แนวคิด เราจะพิจารณาในกรณีที่ $x + 1 \geq 0$ และ $x + 1 < 0$

วิธีทำ กรณีที่ 1

$$x + 1 \geq 0 \text{ นั่นคือ } x \geq -1$$

$$\text{จะได้ } x + 1 > x - 3$$

$$1 > -3$$

แสดงว่า x สามารถเป็นจำนวนจริงใดก็ได้ หรือ $x \in R$

ดังนั้น ค่า x ที่สอดคล้อง คือ $x \geq -1$ และ $x \in R$

นั่นคือ $x \geq -1$ หรือ $[-1, \infty)$

กรณีที่ 2

$$x + 1 < 0 \text{ นั่นคือ } x < -1$$

$$\text{จะได้ } -(x + 1) > x - 3$$

$$-x - 1 > x - 3$$

$$x < 1$$

ดังนั้น ค่า x ที่สอดคล้อง คือ $x < -1$ และ $x < 1$

นั่นคือ $x < -1$ หรือ $(-\infty, -1)$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการ คือ $(-\infty, -1) \cup [-1, \infty)$ หรือ R

จะเห็นได้ชัดเจนเลยว่า การตรวจคำตอบเป็นสิ่งสำคัญ หลังจากที่เรได้คำตอบมาแล้ว

ก็ยังไม่สามารถตอบได้ทันที เราต้องนำเงื่อนไขที่กำหนดไว้มาพิจารณาร่วมด้วยเพื่อเป็นการ

ตรวจสอบความถูกต้องนั่นเอง ในตัวอย่างถัดไปเราจะมาดูอสมการค่าสัมบูรณ์ ที่ทั้งสองข้างของ

อสมการอยู่ในรูปค่าสัมบูรณ์กันว่าทำอย่างไร

ตัวอย่างที่ 20

จงหาเซตคำตอบของอสมการ $|x| > |x - 1|$

แนวคิด เราจะใช้วิธียกกำลังสองทั้งสองข้างของอสมการ เพื่อปลดเครื่องหมาย
ค่าสัมบูรณ์ออกนั่นเอง

วิธีทำ เนื่องจาก $|x| > 0$ และ $|x - 1| > 0$

จะได้ $|x|^2 > |x - 1|^2$

$$x^2 > (x - 1)^2$$

$$x^2 > x^2 - 2x + 1$$

$$2x > 1$$

$$x > \frac{1}{2}$$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการ คือ $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

“เวลาที่ดียิ่งที่สุดในการเริ่มต้น คือ ตอนนี้”

- พี่ปั้น SmartMathPro -

สนใจทิวทัศน์ศาสตร์เพิ่มเติม online.smartmathpro.com