พาราโบลา (ฟังก์ชันกำลังสอง) ม.3

พาราโบลา (ฟังก์ชันกำลังสอง) คืออะไร ?

น้อง ๆ ลองสังเกตสิ่งที่อยู่รอบ ๆ ตัวจะพบสิ่งก่อสร้าง วัสดุ อุปกรณ์ หรือลักษณะในธรรมชาติบางอย่าง ที่ส่วนประกอบมีลักษณะเป็นเส้นโค้งทางเรขาคณิต ตัวอย่างสิ่งก่อสร้างระดับโลก เช่น บริเวณขาของหอไอเฟล (Eiffel Tower) ในประเทศฝรั่งเศส ที่มีความโค้ง หรือสะพานโกลเดนเกต (Golden Gate Bridge) ที่ซานฟรานซิสโก รัฐแคลิฟอร์เนีย สหรัฐอเมริกา ก็จะมีส่วนที่โค้ง ๆ โดยที่เส้นโค้งเหล่านี้จะมีลักษณะคล้ายกันเลย

กาลิเลโอ (Galileo Galilei) นักวิทยาศาสตร์ชาวอิตาลีที่มีชื่อเสียงของโลก พบว่าเมื่อเราโยนวัตถุ ไปในอากาศ เส้นทางการเคลื่อนที่ของวัตถุนั้นจะมีลักษณะเป็นเส้นโค้ง ในทางคณิตศาสตร์เรียกเส้นโค้งที่มีลักษณะดังกล่าวนี้ว่า **พาราโบลา (parabola)**

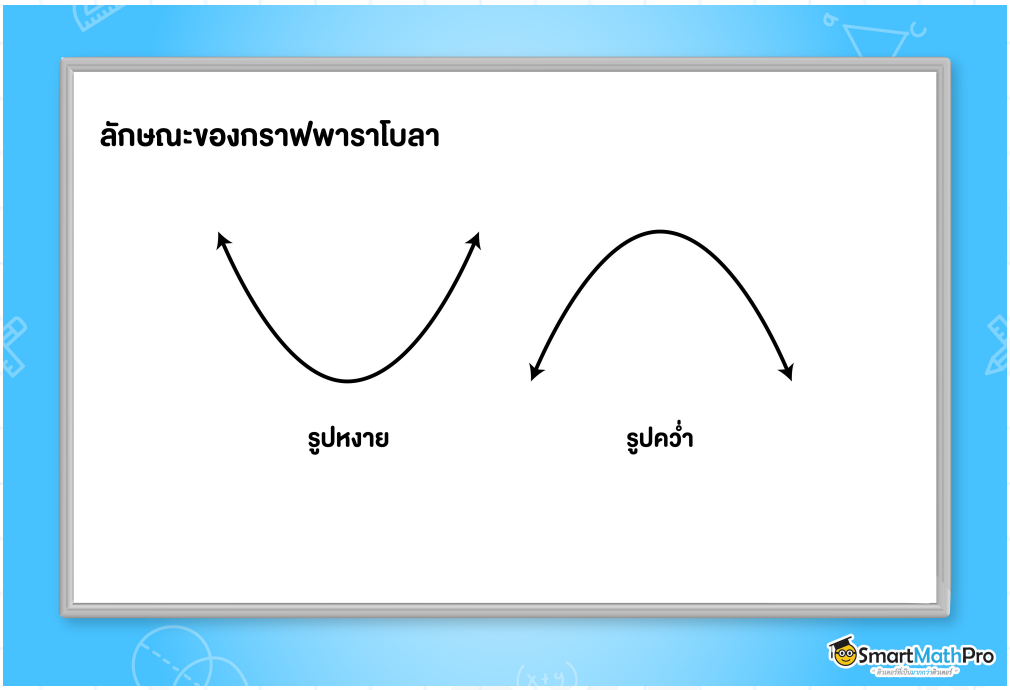
สมการของพาราโบลา ว่าจะมีรูปแบบหน้าตาของสมการเป็นแบบไหน ดูจากภาพด้านล่างนี้เลย

ฟังก์ชันกำลังสอง

ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $y = ax^2 + bx + c$ หรือ $f(x) = ax^2 + bx + c$
เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$
เรียกว่า ฟังก์ชันกำลังสอง (quadratic function)

SmartMathPro

กราฟของพาราโบลาในระดับชั้นนี้ที่น้อง ๆ จะได้เรียนต่อไปจะมีลักษณะ 2 แบบ คือ กราฟเป็นพาราโบลาหงาย หรือเป็นพาราโบลาคว่ำ ตามรูปด้านล่างนี้ โดยสมการของฟังก์ชันกำลังสองที่อยู่ในรูป $y = ax^2 + bx + c$ จะเรียกว่า **สมการของพาราโบลา**



<u>ตัวอย่างที่ 1</u>

สมการในแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นสมการของพาราโบลาหรือไม่

1. $y = x^2 - x + 2$

<u>ตอบ</u> เป็นสมการของพาราโบลา

2. $x = y^2 + y$

<u>ตอบ</u> ไม่เป็นสมการของพาราโบลา

3. $y = \frac{1}{x^2}$

<u>ตอบ</u> ไม่เป็นสมการของพาราโบลา

4. $x^2 + y = 9$

<u>ตอบ</u> เป็นสมการของพาราโบลา

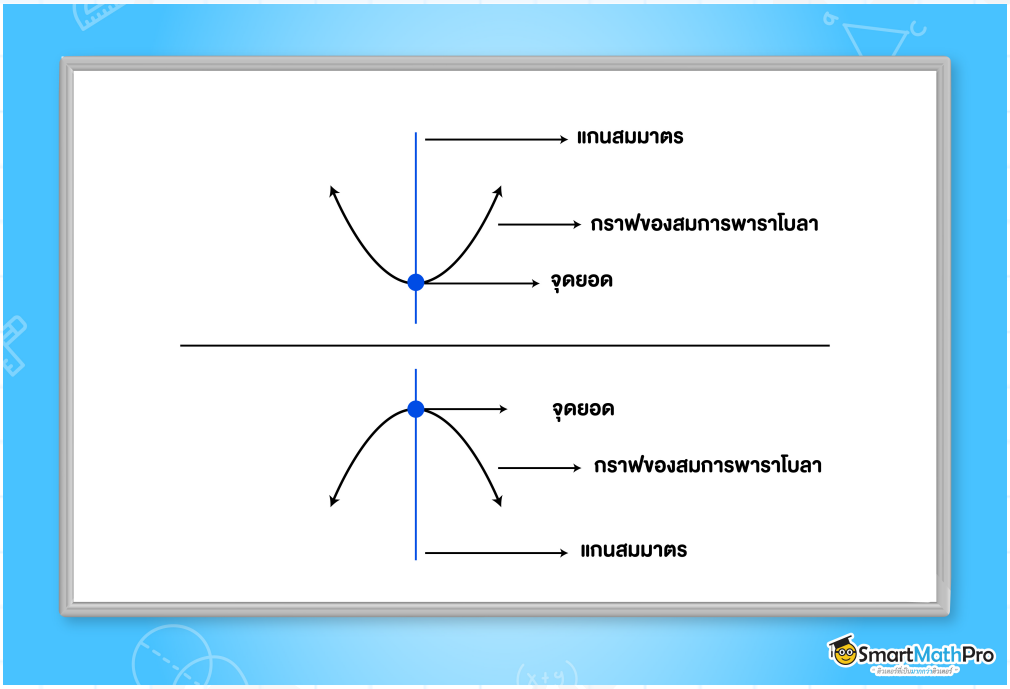
5. $y = (x + 2)(x - 1)$

<u>ตอบ</u> เป็นสมการของพาราโบลา

จากตัวอย่างข้างต้น วิธีแยกว่าสมการใดเป็นหรือไม่เป็นสมการของพาราโบลาทำได้ง่ายมากเลยน้าา คือ ให้น้อง ๆ ลองจัดรูปสมการที่โจทย์กำหนดให้อยู่ในรูป $y = ax^2 + bx + c$ ว่าสามารถทำได้หรือเปล่า (ซึ่งอาจทำได้โดยการย้ายข้างของสมการเพื่อแยกตัวแปร y ให้อยู่เพียงตัวเดียว รวมถึงการกระจายผลคูณในวงเล็บออกมาเหมือนข้อย่อยที่ **5** หรือจัดรูปด้วยวิธีอื่น ๆ)

ถ้าสมการนั้นสามารถจัดรูปได้ เราจะได้ว่าสมการนั้นเป็นสมการของพาราโบลา แต่ถ้าพยายามจัดรูปจนถึงที่สุดแล้วก็ยังไม่สามารถจัดให้อยู่ในรูป $y = ax^2 + bx + c$ ได้ เหมือนในข้อย่อยที่ **2** และ **3** ก็จะได้ว่าสมการนั้นไม่เป็นสมการของพาราโบลา

ต่อไปเรามาทำความรู้จักกับส่วนประกอบต่าง ๆ ของกราฟพาราโบลาเพิ่มเติมกันดีกว่า ซึ่งมีส่วนประกอบตามนี้



พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(0, 0)$

พอเรารู้ส่วนประกอบของพาราโบลาไปแล้ว ต่อไปเราจะมาดูกันว่ากราฟพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(0, 0)$ จะมีสมการของพาราโบลา หรือฟังก์ชันกำลังสองที่มีหน้าตาของสมการเป็นยังไง พาราโบลาจะคว่ำ หรือหงายตอนไหน รวมถึงการสังเกตความแคบหรือความบานของกราฟด้วยว่าความแตกต่างกันนั้น เกิดจากค่าไหนของสมการ

พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0, 0)$ คือพาราโบลาที่มีสมการอยู่ในรูป $y = ax^2$

โดยเราจะบอกลักษณะของกราฟได้จากค่า a

เมื่อ $a > 0$ (ค่า a เป็นบวก) กราฟจะมีลักษณะเป็นพาราโบลาหงาย และจะมีจุดต่ำสุด อยู่ที่ $(0, 0)$ แต่ไม่มีจุดสูงสุด โดยค่าต่ำสุดของ y คือ 0

SmartMathPro

เมื่อ $a < 0$ (ค่า a เป็นลบ) กราฟจะมีลักษณะเป็นพาราโบลาคว่ำ และจะมีจุดสูงสุด อยู่ที่ $(0, 0)$ แต่ไม่มีจุดต่ำสุด โดยค่าสูงสุดของ y คือ 0

ตัวอย่างที่ 2

จงบอกลักษณะสำคัญของกราฟพาราโบลาของสมการ $y = \frac{1}{2}x^2$

วิธีทำ พิจารณาสมการของพาราโบลา เนื่องจาก $a = \frac{1}{2}$ ซึ่ง $a > 0$

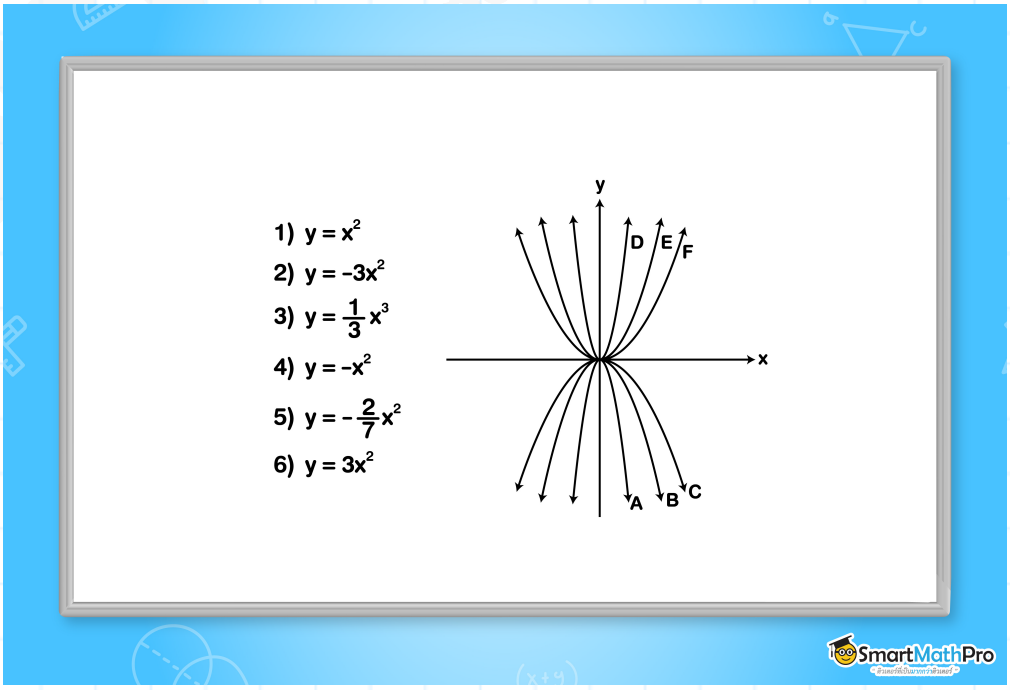
ดังนั้น กราฟจะมีลักษณะเป็นพาราโบลา**หงาย** และกราฟจะมีจุด**ต่ำสุด** อยู่ที่ $(0, 0)$ แต่ไม่มีจุด**สูงสุด** โดยมีค่า**ต่ำสุด**ของ y คือ 0

โดยความบานของกราฟ จะมากหรือน้อยก็ขึ้นอยู่กับค่า a เช่นเดียวกัน ถ้า $|a|$ มีค่าน้อยลงเรื่อย ๆ กราฟจะบานมากขึ้น เรื่อย ๆ และถ้า $|a|$ มีค่ามากขึ้นเรื่อย ๆ กราฟจะบานน้อยลงเรื่อย ๆ (กราฟดูแคบลง)

วิธีสังเกต คือ เลขเล็ก ๆ กราฟจะบาน เลขใหญ่ ๆ กราฟจะแคบ โดยไม่ต้องสนเครื่องหมายบวกลบ และเราสามารถบอกได้ว่าพาราโบลานี้ จะมีแกนสมมาตรอยู่ที่แกน y หรือ $x = 0$ เสมอ

ตัวอย่างที่ 3

จงจับคู่สมการของพาราโบลากับกราฟของสมการต่อไปนี้



SmartMathPro

วิธีทำ พิจารณาสมการของพาราโบลา $y = ax^2$ โดยแบ่งออกเป็นสองกลุ่ม

กลุ่มที่ 1 $a > 0$

ได้แก่ สมการในข้อ **1** ข้อ **3** และข้อ **6**

เนื่องจาก ถ้า $|a|$ มีค่าน้อยลงเรื่อย ๆ กราฟจะบานมากขึ้นเรื่อย ๆ

จะได้ว่า พาราโบลา D เป็นกราฟของสมการในข้อ **6** คือ $y = 3x^2$

พาราโบลา E เป็นกราฟของสมการในข้อ **1** คือ $y = x^2$

พาราโบลา F เป็นกราฟของสมการในข้อ **3** คือ $y = \frac{1}{3}x^2$

กลุ่มที่ 2 $a < 0$

ได้แก่ สมการในข้อ **2** ข้อ **4** และข้อ **5**

เนื่องจาก ถ้า $|a|$ มีค่าน้อยลงเรื่อย ๆ กราฟจะบานมากขึ้นเรื่อย ๆ

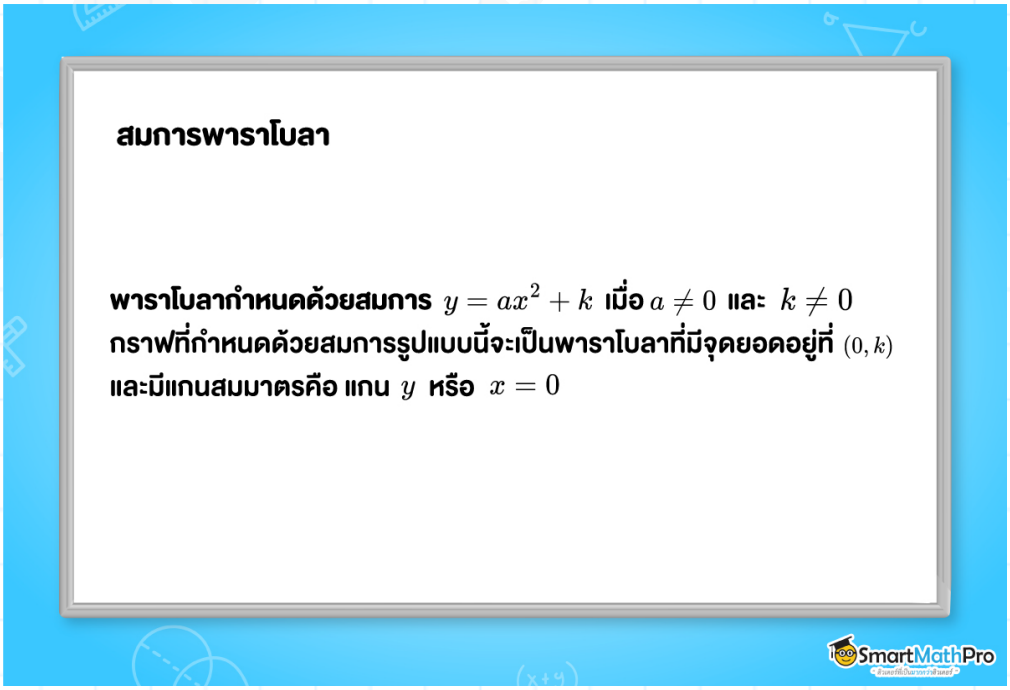
จะได้ว่า พาราโบลา A เป็นกราฟของสมการในข้อ **2** คือ $y = -3x^2$

พาราโบลา B เป็นกราฟของสมการในข้อ **4** คือ $y = -x^2$

พาราโบลา C เป็นกราฟของสมการในข้อ **5** คือ $y = -\frac{2}{7}x^2$

สมการพาราโบลา

จากเนื้อหาก่อนหน้านี้เราได้เห็นรูปแบบสมการของพาราโบลาในรูป $y = ax^2$ กันแล้ว ทีนี้มาดูกันว่าสมการพาราโบลามีรูปแบบสมการเป็นแบบไหนได้อีกบ้าง และกราฟที่ได้จากสมการแต่ละรูปแบบจะมีลักษณะที่แตกต่างกันยังไงด้วย



SmartMathPro

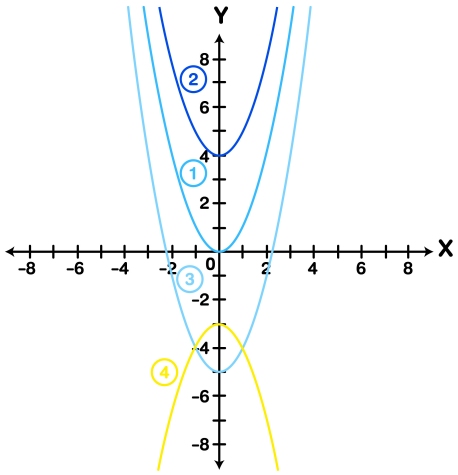
ตัวอย่างที่ 4

กำหนดค่า x ดังในตาราง จงเติมค่า y ที่สอดคล้องกับสมการที่กำหนดให้ลงในตารางให้ถูกต้อง พร้อมทั้งวาดกราฟของแต่ละสมการที่กำหนดให้

เติมค่า y ที่สอดคล้องกับสมการที่กำหนดให้ได้ดังนี้

สมการ \ x	-2	-1	0	1	2
1. $y = \frac{1}{2}x^2$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2
2. $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$
3. $y = \frac{1}{2}(x-2)^2$	8	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0
4. $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2$	$-\frac{9}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$

(ต่อ)



สังเกตว่า จุดยอดของกราฟจะอยู่ที่จุด $(0, k)$ มีค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของ y เท่ากับ k และกราฟมีลักษณะการเปลี่ยนแปลง โดยการเลื่อนขึ้นหรือเลื่อนลงตามค่า k

ซึ่งสรุปได้ว่า เมื่อ $k > 0$ จะทำให้กราฟพาราโบลาเลื่อนขึ้น
และเมื่อ $k < 0$ จะทำให้กราฟพาราโบลาเลื่อนลง

พาราโบลากำหนดด้วยสมการ $y = a(x-h)^2$ เมื่อ $a \neq 0$ และ $h \neq 0$
กราฟที่กำหนดด้วยสมการรูปแบบนี้ จะเป็นพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(h, 0)$
และมีแกนสมมาตรคือ เส้นตรง $x = h$

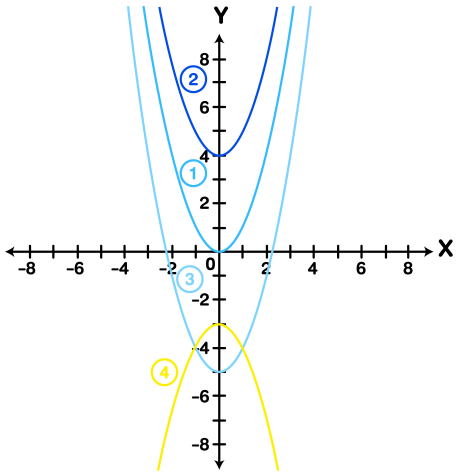
ตัวอย่างที่ 5

กำหนดค่า x ดังในตาราง จงเติมค่า y ที่สอดคล้องกับสมการที่กำหนดให้ลงในตารางให้ถูกต้อง พร้อมทั้งวาดกราฟของแต่ละสมการที่กำหนดให้

เติมค่า y ที่สอดคล้องกับสมการที่กำหนดให้ได้ดังนี้

สมการ \ x	-2	-1	0	1	2
1. $y = \frac{1}{2}x^2$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2
2. $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$
3. $y = \frac{1}{2}(x-2)^2$	8	$\frac{9}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0
4. $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2$	$-\frac{9}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$

(ต่อ)



จากตัวอย่างนี้จะสังเกตได้ว่า จุดยอดของกราฟจะอยู่ที่จุด $(h, 0)$ และกราฟมีลักษณะการเปลี่ยนแปลงโดยการเลื่อนไปทางซ้ายหรือเลื่อนไปทางขวาตามค่า h

ซึ่งสรุปได้ว่า เมื่อ $h > 0$ จะทำให้กราฟพาราโบลาเลื่อนไปทางขวา
และเมื่อ $h < 0$ จะทำให้กราฟพาราโบลาเลื่อนไปทางซ้าย

จาก สองตัวอย่างที่ผ่านมาถือเป็นรูปแบบย่อยเพื่อทำให้เราสังเกตค่าของ h และ k ว่าส่งผลยังไงกับกราฟของสมการพาราโบลา ทีนี้มาดูรูปแบบเต็ม ๆ ของมัน คือสมการพาราโบลาที่มีทั้งค่า h และ k กันดีกว่า

พาราโบลากำหนดด้วยสมการ $y = a(x-h)^2 + k$ เมื่อ $a \neq 0$, $h \neq 0$ และ $k \neq 0$

กราฟที่กำหนดด้วยสมการรูปแบบนี้ จะเป็นพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ (h, k) และมีแกนสมมาตรคือ เส้นตรง $x = h$

ตัวอย่างที่ 6

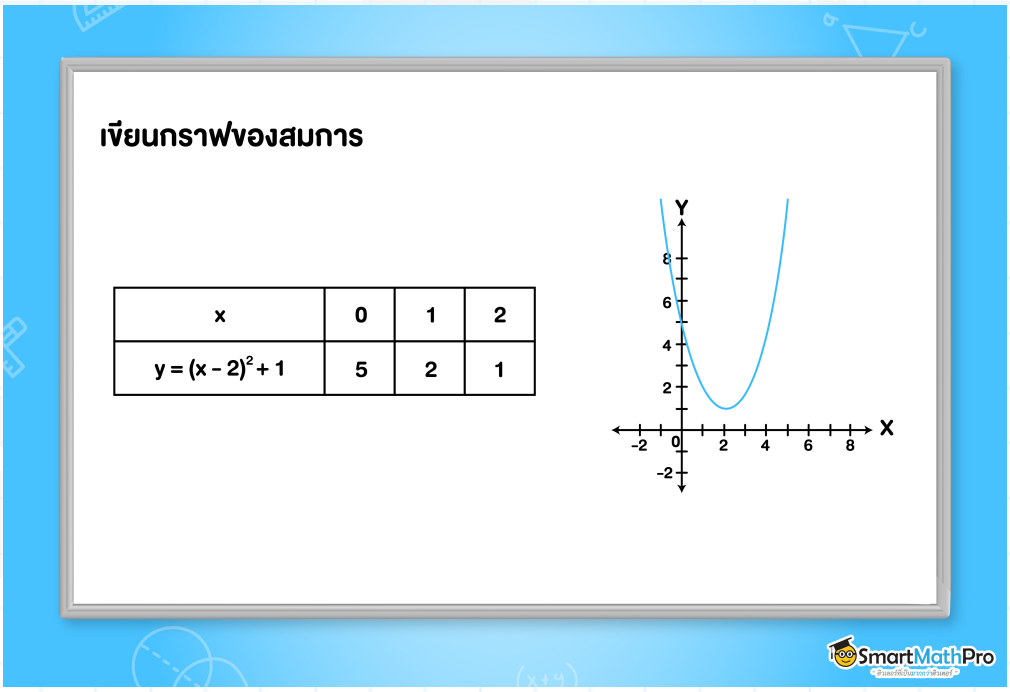
จงเขียนกราฟของสมการ $y = (x-2)^2 + 1$

วิธีทำ พิจารณากราฟของสมการ

$$y = (x-2)^2 + 1$$

จะได้

1. กราฟเป็นพาราโบลาหงาย ที่มีเส้นตรง $x = 2$ เป็นแกนสมมาตร
2. จุดต่ำสุดของกราฟ คือ จุด $(2, 1)$
3. ค่าต่ำสุดของ y คือ 1
4. หาพิกัดของจุดต่าง ๆ ที่อยู่ข้างเดียวกันของแกนสมมาตร



SmartMathPro

ตัวอย่างที่ 7

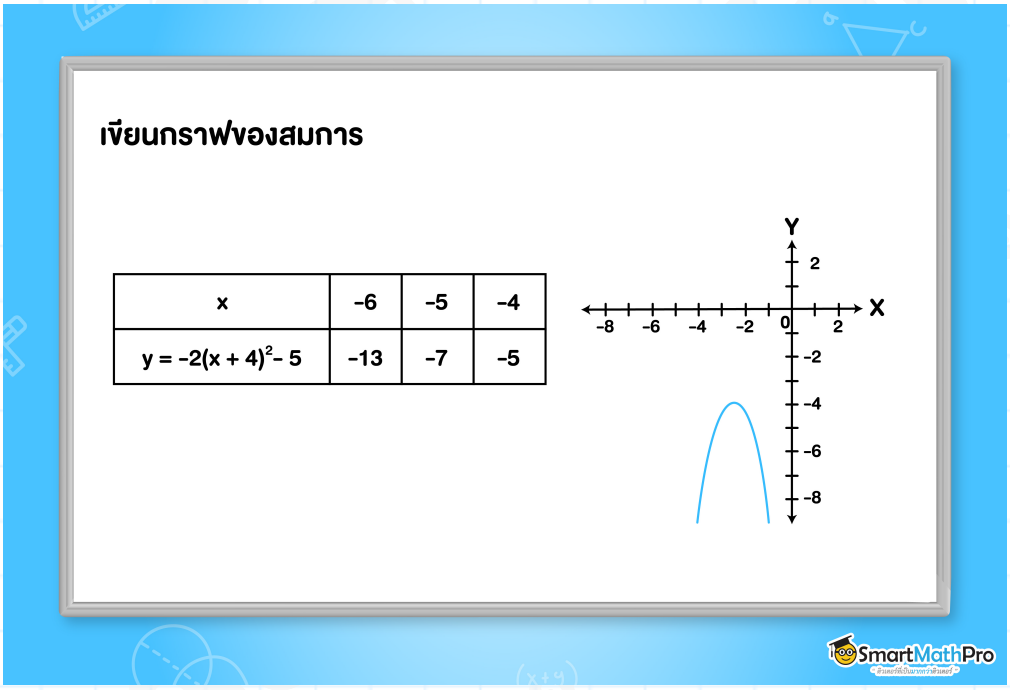
จงเขียนกราฟของสมการ $y = -2(x+4)^2 - 5$

วิธีทำ พิจารณากราฟของสมการ

$$y = -2(x+4)^2 - 5$$

จะได้

1. กราฟเป็นพาราโบลาคว่ำ ที่มีเส้นตรง $x = -4$ เป็นแกนสมมาตร
2. จุดสูงสุดของกราฟ คือ จุด $(-4, -5)$
3. ค่าต่ำสุดของ y คือ -5
4. หาพิกัดของจุดต่าง ๆ ที่อยู่ข้างเดียวกันของแกนสมมาตร



เขียนเส้นโค้งเรียบผ่านจุดพิกัดตามตาราง และเขียนเส้นโค้งเรียงที่สมมาตรกับอีกข้างหนึ่งของเส้นตรง $x = -4$ จะได้กราฟของสมการ $y = -2(x+4)^2 - 5$

จากตัวอย่างที่ผ่านมาของสมการพาราโบลา เราสามารถสรุปได้ว่า

1. พาราโบลาที่กำหนดด้วยสมการ $y = a(x-h)^2 + k$ เมื่อ $a \neq 0$

- ถ้า $h = 0$ และ $k = 0$
  จะได้สมการ $y = ax^2$
- ถ้า $h = 0$ และ $k \neq 0$
  จะได้สมการ $y = ax^2 + k$
- ถ้า $h \neq 0$ และ $k = 0$
  จะได้สมการ $y = a(x-h)^2$
- ถ้า $h \neq 0$ และ $k \neq 0$
  จะได้สมการ $y = a(x-h)^2 + k$

SmartMathPro

2. พาราโบลาที่กำหนดด้วยสมการ $y = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a \neq 0$

ในกรณีที่สมการของพาราโบลาอยู่ในรูปแบบ $y = ax^2 + bx + c$ จะมีปัญหาว่ารูปแบบดังกล่าวจะนำไปวาดกราฟของพาราโบลาและหาส่วนประกอบต่าง ๆ ของพาราโบลาได้ยากแต่น้อง ๆ ไม่ต้องกังวลน้าา เราจะจัดรูปสมการนี้ใหม่เพื่อให้สมการอยู่ในรูปแบบของ ที่เพิ่งผ่านมาก่อนหน้า แล้วเราก็จะวาดกราฟและหาส่วนประกอบของพาราโบลาจากสมการที่จัดใหม่ได้เลย

เพื่อให้สมการอยู่ในรูปแบบของ $y = a(x + h)^2 + k$ ที่เพิ่งผ่านมาก่อนหน้า แล้วเราก็จะวาดกราฟและหาส่วนประกอบของพาราโบลาจากสมการที่จัดใหม่ได้เลยด้เลย

<u>ตัวอย่างที่ 8</u>

จงพิจารณาสมการ $y = x^2 - 2x + 4$ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

1. กราฟเป็นพาราโบลาคว่ำหรือพาราโบลาหงาย
2. จุดสูงสุดหรือจุดต่ำสุดของกราฟเป็นจุดใด
3. เส้นตรงใดเป็นแกนสมมาตร

<u>วิธีทำ</u> เขียนสมการให้อยู่ในรูป $y = a(x - h)^2 + k$ ได้ดังนี้

$y = x^2 - 2x + 4$

$= (x^2 - 2x) + 4$

$= (x^2 - 2(1)(x) + 1^2 - 1^2) + 4$

$= (x - 1)^2 - 1 + 4$

$y = (x - 1)^2 + 3$

ดังนั้น สรุปจากสมการของพาราโบลาได้ว่า

1. กราฟเป็นพาราโบลาหงาย
2. มีจุดต่ำสุดของกราฟเป็นจุด (1, 3)
3. มีเส้นตรง x = 1 เป็นแกนสมมาตร

จะเห็นว่าวิธีการเบื้องต้นจะมีขั้นตอนที่ใช้ความรู้ในบทการแยกตัวประกอบของพหุนาม เรื่องการจัดพหุนามดีกรีสองให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์เข้ามาช่วย อย่างไรก็ตาม พี่ก็มีวิธีที่ง่ายกว่านี้และเป็นวิธีที่ไม่จำเป็นต้องจัดรูปกำลังสองสมบูรณ์ของพหุนามมาให้ด้วย แค่น้อง ๆ รู้สูตรด้านล่างนี้ก็เอาไปปรับใช้ได้เลย

SmartMathPro

สูตรลัดในการหาจุดยอดของพาราโบลา

สูตรลัดในการหาจุดยอดของพาราโบลา

เมื่อสมการพาราโบลาอยู่ในรูป $y = ax^2 + bx + c$
จะสามารถหาจุดยอดของพาราโบลาได้จากสูตร $(h, k) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$

SmartMathPro

ตัวอย่างที่ 9

จงพิจารณาสมการ $y = 2x^2 - 12x + 19$ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

1. กราฟเป็นพาราโบลาคว่ำหรือพาราโบลาหงาย
2. จุดสูงสุดหรือจุดต่ำสุดของกราฟเป็นจุดใด
3. เส้นตรงใดเป็นแกนสมมาตร

วิธีทำ

จาก $y = 2x^2 - 12x + 19$

จะเห็นได้ว่า $a = 2$, $b = -12$, และ $c = 19$

จากสูตร $(h, k) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

จะได้ $(h, k) = \left(\frac{-(-12)}{2(2)}, \frac{4(2)(19) - (-12)^2}{4(2)}\right) = (3, 1)$

ดังนั้น สรุปจากสมการของพาราโบลาได้ว่า

1. กราฟเป็นพาราโบลาหงาย
2. มีจุดต่ำสุดของกราฟเป็นจุด (3, 1)
3. มีเส้นตรง $x = 3$ เป็นแกนสมมาตร

SmartMathPro

"เวลาที่ดีที่สุดในการเริ่มต้น คือ **ตอนนี้**"

- พี่ปั้น SmartMathPro -

สนใจติวคณิตศาสตร์เพิ่มเติม https://online.smartmathpro.com/