

สมการกำลังสองตัวแปรเดียว ม.3

สมการกำลังสองตัวแปรเดียว คืออะไร ?

น้อง ๆ เคยรู้จักพหุนาม เช่น $3x^2$, $2x^2 + x$, $x^2 - 5$ และ $3x^2 - 6x + 1$ ซึ่งเป็นพหุนามดีกรีสองมาแล้ว ในหัวข้อนี้เราจะมาเรียนเรื่องที่มีชื่อคล้ายกันนั่นคือสมการกำลังสองตัวแปรเดียว ซึ่งเป็นการนำพหุนามดีกรีสองมาใช้ต่อยอด

เรามาศึกษากันก่อนว่าสมการแบบไหนที่เป็นสมการกำลังสองตัวแปรเดียว และสมการไหนที่ไม่เป็นสมการกำลังสองตัวแปรเดียว

ตัวอย่างของสมการที่เป็นและไม่เป็นสมการกำลังสองตัวแปรเดียว

เป็น

$$-x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$y(y - 1) = 0$$

ไม่เป็น

$$x^3 - 2x + 1 = 0$$

$$-\frac{1}{2}x + y^2 = 0$$

$$2x + x = 0$$

จากรูปข้างต้น ทุกคนจะสังเกตเห็นได้ว่าสมการกำลังสองตัวแปรเดียวจะต้องมีลักษณะที่เมื่อจัดรูปแล้ว มีรูปทั่วไปเป็นดังนี้

สมการกำลังสองตัวแปรเดียว คือ สมการของพหุนามตัวแปรเดียวที่มีดีกรีเท่ากับ 2 มีรูปทั่วไปเป็น $ax^2 + bx + c = 0$ คือ x เป็นตัวแปร a, b และ c เป็นค่าคงตัว โดยที่ $a \neq 0$

หรือข้อสังเกตที่ดูได้ง่ายที่สุดเลยคือ สมการนั้นต้องมีตัวแปรเดียว ไม่ว่าจะ เป็น x, y หรือ z ก็ได้ แต่ย้ำว่าต้องมีตัวแปรเดียว และต้องเป็นพหุนามที่มีดีกรีสอง ถ้าเป็นตามนี้แล้วไม่ว่าสัมประสิทธิ์นำจะเป็นบวก ลบ หรือเศษส่วนก็จะถือว่าเป็นสมการกำลังสองตัวแปรเดียวทั้งหมด

ก่อนที่จะไปแก้สมการ เราจะนิยมเขียนสมการที่โจทย์ให้มาให้อยู่ในรูปทั่วไปก่อน เพื่อให้เราแก้สมการได้ง่ายขึ้น ดังนั้นเรามาซ้อมเขียนสมการกำลังสองตัวแปรเดียวในรูปทั่วไปในตัวอย่างต่อไปนี้

คำตอบของสมการกำลังสองตัวแปรเดียว

คำตอบของสมการ คือ จำนวนจริงที่เรานำไปแทนตัวแปรในสมการแล้วทำให้ได้สมการที่เป็นจริง ซึ่งคำตอบของสมการกำลังสองตัวแปรเดี่ยวดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างการพิจารณาคำตอบของสมการกำลังสองตัวแปรเดียว

กำหนดสมการ $x^2 - x = 0$

• เมื่อแทน $x = 0$

จะได้ $0^2 - 0 = 0$

นั่นคือ $0 = 0$

ดังนั้น $x = 0$

ซึ่งสมการเป็นจริง

เป็นคำตอบของสมการ

• เมื่อแทน $x = -1$

จะได้ $(-1)^2 - (-1) = 0$

$1 + 1 = 0$

นั่นคือ $2 = 0$

ดังนั้น $x = -1$

ซึ่งสมการเป็นเท็จ

ไม่เป็นคำตอบของสมการ

ตัวอย่างที่ 1

1) $3x^2 = x - 2$

วิธีทำ

จงเขียนสมการกำลังสองตัวแปรเดียวต่อไปนี้

ให้อยู่ในรูปทั่วไป พร้อมทั้งบอกค่าของ a , b และ c

จาก $3x^2 = x - 2$

จะได้ $3x^2 - x + 2 = 0$

จากรูปทั่วไปของสมการกำลังสองตัวแปรเดียว $ax^2 + bx + c = 0$

จะได้ $a = 3$, $b = -1$ และ $c = 2$

2) $(y - 1)^2 + y = 2$

วิธีทำ

จาก $(y - 1)^2 + y = 2$

จะได้ $y^2 - 2y + 1 + y - 2 = 0$

$y^2 - y - 1 = 0$

จากรูปทั่วไปของสมการกำลังสองตัวแปรเดียว $ax^2 + bx + c = 0$

จะได้ $a = 1$, $b = -1$ และ $c = -1$

จากตัวอย่างข้างต้น น้อย ๆ บางคนอาจจะลองแทนค่าจำนวนจริงอื่น ๆ นอกจาก $x = 0$ ลงในสมการ $x^2 - x = 0$ แล้วทำให้ได้สมการที่เป็นจริงอีกใช้ไหม นั่นแสดงว่าจำนวนคำตอบของสมการกำลังสองตัวแปรเดียวอาจไม่ได้มีเพียงคำตอบเดียวก็ได้ โดยลองสังเกตตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างแสดงจำนวนคำตอบของสมการกำลังสองตัวแปรเดียว

- $x^2 - x = 0$
เมื่อแทน $x = 0$ และ $x = 1$ แล้วทำให้ได้สมการที่เป็นจริง
- $y^2 - 4y + 4 = 0$
เมื่อแทน $y = 2$ แล้วทำให้ได้สมการที่เป็นจริง
- $x^2 + 4 = 0$
ไม่มีจำนวนจริงใดที่นำไปแทนค่าแล้วทำให้ได้สมการที่เป็นจริง

ทุกคนจะสังเกตเห็นว่าในตัวอย่างแรก สมการ $x^2 - x = 0$ มีจำนวนจริงสองจำนวน ที่เมื่อนำไปแทนแล้วทำให้สมการเป็นจริง ดังนั้นสมการนี้จะมีจำนวนจริงสองจำนวนเป็นคำตอบ

ตัวอย่างถัดมา $y^2 - 4y + 4 = 0$ มีจำนวนจริงเพียงจำนวนเดียวเป็นคำตอบ และ $x^2 + 4 = 0$ ไม่มีจำนวนจริงใดเป็นคำตอบเลย ในตัวอย่างนี้น้อย ๆ บางคนอาจจะจัดรูปสมการให้เป็น $x^2 = -4$ ก่อนได้ แล้วจะพบว่าไม่มีจำนวนจริงไหนเลยที่เมื่อเรานำไปยกกำลังสองแล้วจะมีค่าเป็นจำนวนลบ

ดังนั้นสมการกำลังสองตัวแปรเดียวอาจมี 2 คำตอบ, 1 คำตอบ หรือไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริงเลยก็ได้ โดยในทางคณิตศาสตร์สมการกำลังสองตัวแปรเดียวมีคำตอบได้ไม่เกิน 2 คำตอบ

วิธีการแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียว

ความเป็นจริง พี่ไม่แนะนำให้น้อย ๆ ใช้วิธีการค่อย ๆ หาจำนวนจริงเพื่อนำไปแทนในสมการทีละตัว เพื่อตรวจสอบว่าจำนวนจริงนั้นทำให้สมการเป็นจริงหรือเท็จ เนื่องจากต้องใช้เวลาและไม่สะดวก อาจจะหาจำนวนจริงที่เป็นคำตอบได้ไม่ครบหรืออาจหาไม่เจอ เช่น คำตอบเป็นจำนวนลบ เป็นเศษส่วน หรืออาจจะเป็นจำนวนอตรรกยะ

ดังนั้นในการแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียวในบทนี้จะกล่าวถึงวิธีการที่สะดวกกว่าการแทนค่าทีละจำนวนไว้ 2 วิธี ได้แก่ การแยกตัวประกอบ และการใช้สูตร โดยวิธีแรกจะเป็นวิธีที่เราจะได้ใช้ความรู้เรื่องการแยกตัวประกอบของพหุนามที่เคยเรียนมาช่วยแก้สมการได้อย่างที่กล่าวไปตอนแรก

การแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียวโดยใช้การแยกตัวประกอบ

ในกรณีที่เราสามารถแยกตัวประกอบของ $ax^2 + bx + c$ ให้อยู่ในรูปของการคูณกันสองพหุนามของพหุนามดีกรีหนึ่ง (แยกเป็นสองวงเล็บ) เนื่องจากในที่นี้พหุนามใช้แทนจำนวน เราจะใช้สมบัติของจำนวนจริงต่อไปนี้มาใช้ในการหาคำตอบของสมการ

สมบัติของจำนวนจริง

ถ้า m และ n เป็นจำนวนจริง และ $mn = 0$ แล้ว $m = 0$ หรือ $n = 0$

นั่นคือหากพหุนามทั้งสองคูณกันแล้วมีค่าเท่ากับศูนย์ เราจะได้ว่าจะต้องมีพหุนามใดพหุนามหนึ่งหรือทั้งสองพหุนามที่มีค่าเท่ากับศูนย์

เช่น $(x)(x + 1) = 0$

มีพหุนามสองพหุนามคูณกัน คือ x คูณกับ $x + 1$ เมื่อสองพหุนามนั้นคูณกันแล้วได้ศูนย์ ดังนั้น ต้องมีพหุนามใดพหุนามหนึ่ง หรือทั้งสองพหุนามมีค่าเท่ากับศูนย์
จะได้ $x = 0$ หรือ $x + 1 = 0$

ถึงตรงนี้น้อง ๆ อาจจะมองออกไหมว่าเราสามารถใช้ในการแยกตัวประกอบและสมบัติของจำนวนจริงมาแก้สมการได้อย่างไร จะเห็นว่าเราได้ $x = 0$ ซึ่งเราจะได้คำตอบหนึ่งของสมการออกมาแล้วคือ 0 และส่วนที่เป็น $x + 1 = 0$

เราจะต้องดำเนินการอีกเล็กน้อยก็จะได้คำตอบแล้ว พี่จะขอยกตัวอย่างการแก้สมการโดยใช้การแยกตัวประกอบแบบเต็ม ๆ ในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2

จงแก้สมการ $x^2 - 2x - 15 = 0$

แนวคิด	ตรวจสอบคำตอบ
ให้พิจารณาการแยกตัวประกอบของ $x^2 - 2x - 15$ จากนั้นใช้สมบัติของจำนวนจริงในการหาคำตอบต่อไป	• นำ $x = -3$ แทนในสมการ จะได้ว่า $(-3)^2 - 2(-3) - 15 = 0$ $9 + 6 - 15 = 0$ $0 = 0$ สมการเป็นจริง
วิธีทำ $x^2 - 2x - 15 = 0$ $(x + 3)(x - 5) = 0$ ดังนั้น $x + 3 = 0$ หรือ $x - 5 = 0$ จะได้ $x = -3$ หรือ $x = 5$	• นำ $x = 5$ แทนในสมการ จะได้ว่า $(5)^2 - 2(5) - 15 = 0$ $25 - 10 - 15 = 0$ $0 = 0$ สมการเป็นจริง ดังนั้นคำตอบของสมการคือ -3 และ 5

SmartMathPro

จากการตรวจคำตอบข้างต้น น้อง ๆ จะเห็นว่าเมื่อนำคำตอบที่ได้จากการแก้สมการด้วยวิธีการแยกตัวประกอบมาแทนลงในสมการ จะทำให้สมการเป็นจริง นั่นคือคำตอบที่เราหามาถูกต้อง


การแก้สมการโดยใช้การแยกตัวประกอบสามารถนำมาใช้กับการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการกำลังสองตัวแปรเดียวได้เช่นกัน โดยน้อง ๆ จะต้องนำข้อมูลที่โจทย์กำหนดมาสร้างสมการกำลังสองตัวแปรเดียวให้ได้ จากนั้นเราก็จะทำการแก้สมการก็จะสามารถหาคำตอบได้แล้ว โดยลองกำหนดสิ่งที่โจทย์ต้องการให้หาเป็น x ก็จะง่ายขึ้น ดังตัวอย่าง ต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3 ให้ผลคูณของจำนวนเต็มสองจำนวนที่อยู่ติดกันเท่ากับ 240 จงหาค่าของจำนวนเต็มทั้งสองจำนวนนั้น

วิธีทำ ให้ x แทนจำนวนเต็มหนึ่งที่มีค่ามากกว่า และ $x - 1$ แทนจำนวนเต็มอีกจำนวนหนึ่งที่มีค่าน้อยกว่า เนื่องจากผลคูณของจำนวนเต็มสองจำนวนที่อยู่ติดกันเท่ากับ 240

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } (x)(x - 1) &= 240 \\ x^2 - x &= 240 \\ x^2 - x - 240 &= 0 \\ (x + 15)(x - 16) &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x + 15 = 0$ หรือ $x - 16 = 0$
 $x = -15$ หรือ $x = 16$



(ต่อจากตัวอย่างที่ 3) เนื่องจาก x แทนจำนวนเต็ม ดังนั้น x จึงเป็นได้ทั้งจำนวนเต็มลบและจำนวนเต็มบวก

- กรณีที่ 1
จำนวนที่มากกว่ามีค่าเท่ากับ -15
จะได้ว่า อีกจำนวนหนึ่งมีค่าเท่ากับ -16
- กรณีที่ 2
จำนวนที่มากกว่ามีค่าเท่ากับ 16
จะได้ว่า อีกจำนวนหนึ่งมีค่าเท่ากับ 15

ตรวจสอบคำตอบกับเงื่อนไขของโจทย์

1) ผลคูณของ -15 และ -16 คือ $(-15)(-16) = 240$

2) ผลคูณของ 15 และ 16 คือ $(15)(16) = 240$

ดังนั้น จำนวนเต็มทั้งสองนั้นมี 2 ชุด คือ $-15, -16$ และ $15, 16$

การแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียวโดยใช้สูตร

จากวิธีการแก้สมการโดยใช้การแยกตัวประกอบ อาจมีบางสมการที่ไม่สะดวกที่จะใช้วิธีแยกตัวประกอบ เช่น $x^2 - 5x + 5$ ดังนั้นสามารถใช้สูตรต่อไปนี้ในการช่วยแก้สมการได้

สมการกำลังสองตัวแปรเดียวที่อยู่ในรูป $ax^2 + bx + c = 0$
เมื่อ x เป็นตัวแปร a, b และ c เป็นค่าคงตัว โดยที่ $a \neq 0$

- ถ้า $b^2 - 4ac \geq 0$ แล้วจะมีจำนวนจริงเป็นคำตอบของสมการ ซึ่งหาได้จากสูตร

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- ถ้า $b^2 - 4ac < 0$ แล้วจะไม่มีจำนวนจริงใดเป็นคำตอบของสมการ

SmartMathPro

ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่า หาก $b^2 - 4ac \geq 0$ จะได้ว่าสมการกำลังสองตัวแปรเดียวนั้นจะมี 2 คำตอบที่เป็นจำนวนจริง

ตัวอย่างที่ 4

แนวคิด จงแก้สมการ $x^2 - 5x + 5 = 0$
จะตรวจสอบว่าสมการมีคำตอบเป็นจำนวนจริงหรือไม่ก่อน
ถ้ามีคำตอบที่เป็นจำนวนจริงจะใช้สูตรในการแก้สมการต่อไป

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ว่า $a = 1, b = -5, c = 5$
จะได้ $b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(5) = 25 - 20 = 5$ ซึ่ง $5 \geq 0$

จาก $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
 $x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)}$
 $x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$

ดังนั้น คำตอบของสมการคือ $\frac{5 + \sqrt{5}}{2}$ หรือ $\frac{5 - \sqrt{5}}{2}$

SmartMathPro

ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่า หาก $b^2 - 4ac = 0$ จะได้ว่าสมการกำลังสองตัวแปรเดียวนั้นจะมีคำตอบที่เป็นจำนวนจริงเพียงคำตอบเดียว

ตัวอย่างที่ 5

แนวคิด

วิธีทำ

จงแก้สมการ $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 = 0$

จะตรวจสอบว่าสมการมีคำตอบเป็นจำนวนจริงหรือไม่ก่อน
ถ้ามีคำตอบที่เป็นจำนวนจริงจะใช้สูตรในการแก้สมการต่อไป

จากโจทย์ จะได้ว่า $a = 1, b = 2\sqrt{2}, c = 2$

จะได้ $b^2 - 4ac = (2\sqrt{2})^2 - 4(1)(2) = 8 - 8 = 0$ ซึ่ง $0 \geq 0$

จาก $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x = \frac{-(2\sqrt{2}) \pm \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x = -\sqrt{2}$$

ดังนั้น คำตอบของสมการคือ $-\sqrt{2}$

ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่า หาก $b^2 - 4ac < 0$ จะได้ว่าสมการกำลังสองตัวแปรเดียวนั้น
จะไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริง

ตัวอย่างที่ 6

แนวคิด

วิธีทำ

จงแก้สมการ $-10x^2 + 2x - 1 = 0$

จะตรวจสอบว่าสมการมีคำตอบเป็นจำนวนจริง
หรือไม่ก่อน ถ้ามีคำตอบที่เป็นจำนวนจริงจะใช้สูตร
ในการแก้สมการต่อไป

จากโจทย์ จะได้ว่า $a = -10, b = 2, c = -1$

จะได้ $b^2 - 4ac = 2^2 - 4(-10)(-1) = 4 - 40 = -36$

ซึ่ง $-36 < 0$

ดังนั้น สมการไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริง

เทคนิคควรรจำ

น้อง ๆ อาจสังเกตเห็นว่าจำนวนคำตอบของสมการกำลังสองตัวแปรเดียวเป็นดังนี้

- ถ้า $b^2 - 4ac > 0$ สมการจะมี 2 คำตอบ
- ถ้า $b^2 - 4ac = 0$ สมการจะมี 1 คำตอบ
- ถ้า $b^2 - 4ac < 0$ สมการจะไม่มีจำนวนจริงใดเป็นคำตอบ

เพื่อเป็นการประหยัดเวลาในการทำข้อสอบ ไม่โดนข้อสอบช้อตฟีลว่าแทนค่าลงในสูตรมาตั้งนาน สูตรก็ค่อนข้างยาวแต่สมการไม่มีคำตอบเป็นจำนวนจริง

เราอาจตรวจสอบว่าสมการที่กำลังจะแก้ันั้นมีคำตอบเป็นจำนวนจริงหรือไม่ก่อนก็ได้นะ ด้วยการแทนค่า a, b และ c ลงใน $b^2 - 4ac$ ก่อนที่จะแทนค่าในสูตรเต็ม เช่นในตัวอย่างก่อนหน้า คือตัวอย่างที่ 4 - 6 พี่จะตรวจสอบเฉพาะ $b^2 - 4ac$ มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์หรือไม่ แล้วจึงจะหาคำตอบของสมการต่อไป

“เวลาที่ดียิ่งที่สุดในการเริ่มต้น คือ ตอนนี้”

- พี่ปั้น SmartMathPro -

สนใจติวคณิตศาสตร์เพิ่มเติม online.smartmathpro.com