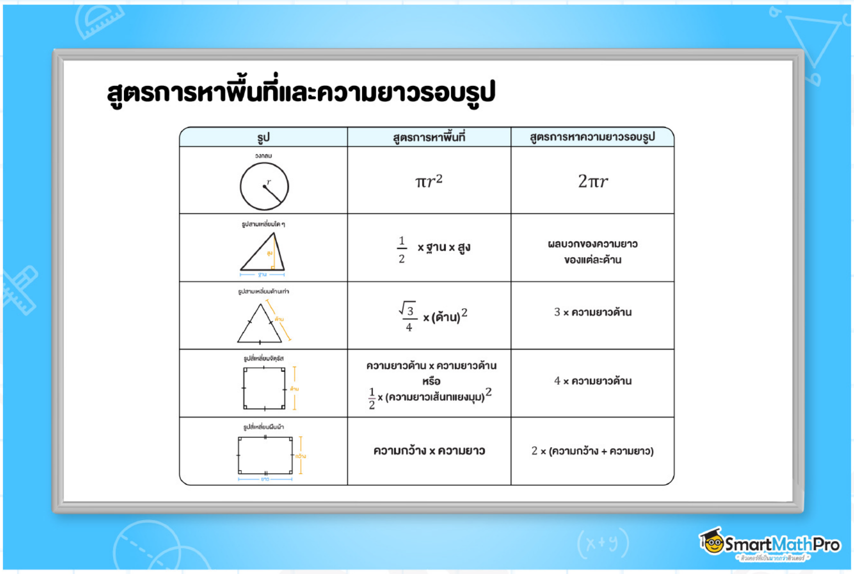
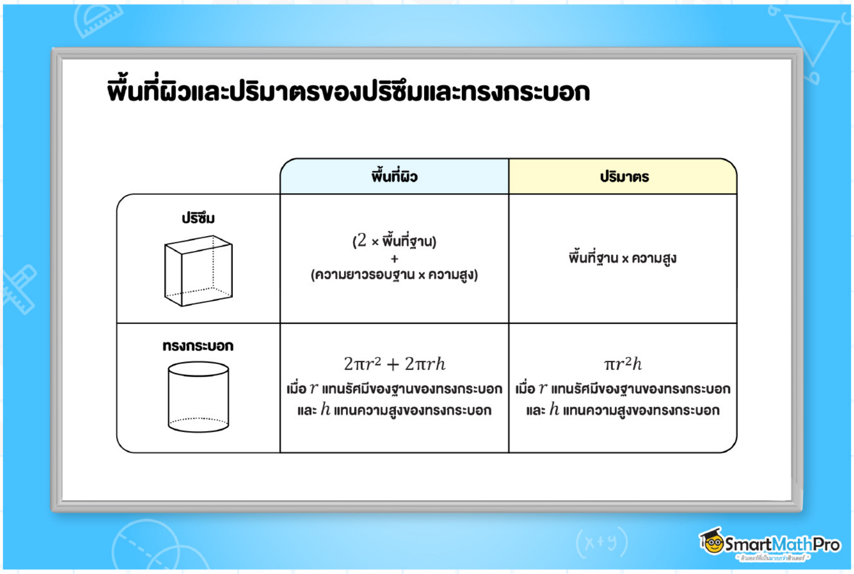
พีระมิด กรวย และทรงกลม ม.3

ทบทวนความรู้พื้นที่ผิวและปริมาตร ปริซึมและทรงกระบอก



สูตรการหาพื้นที่และความยาวรอบรูป

รูป	สูตรการหาพื้นที่	สูตรการหาความยาวรอบรูป
วงกลม	πr^2	$2\pi r$
รูปสามเหลี่ยมใด ๆ	$\frac{1}{2}$ x ฐาน x สูง	ผลบวกของความยาวของแต่ละด้าน
รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า	$\frac{\sqrt{3}}{4}$ x (ด้าน)^2	3 x ความยาวด้าน
รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส	ความยาวด้าน x ความยาวด้าน หรือ $\frac{1}{2}$ x (ความยาวเส้นทแยงมุม)^2	4 x ความยาวด้าน
รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า	ความกว้าง x ความยาว	2 x (ความกว้าง + ความยาว)



พื้นที่ผิวและปริมาตรของปริซึมและทรงกระบอก

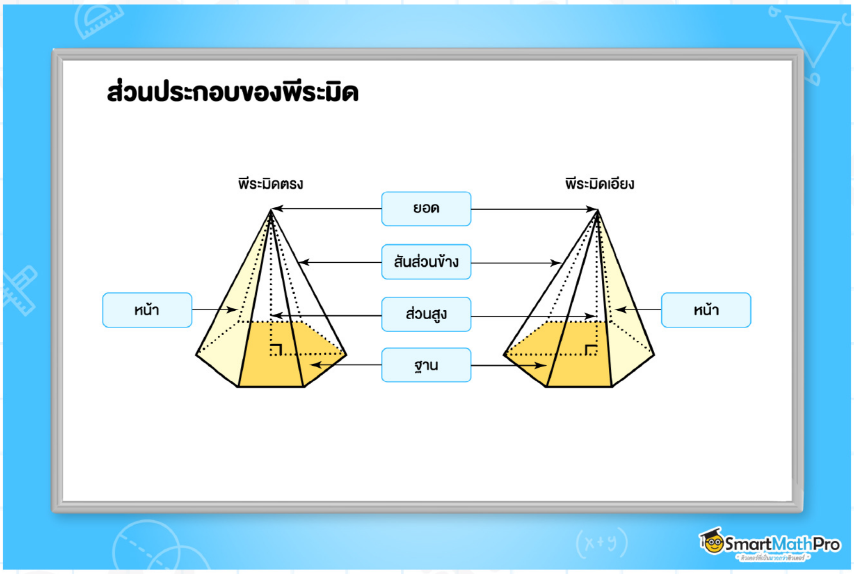
	พื้นที่ผิว	ปริมาตร
ปริซึม	(2 x พื้นที่ฐาน) + (ความยาวรอบฐาน x ความสูง)	พื้นที่ฐาน x ความสูง
ทรงกระบอก	$2\pi r^2 + 2\pi rh$ เมื่อ r แทนรัศมีของฐานของทรงกระบอก และ h แทนความสูงของทรงกระบอก	$\pi r^2 h$ เมื่อ r แทนรัศมีของฐานของทรงกระบอก และ h แทนความสูงของทรงกระบอก

พีระมิด คืออะไร ?

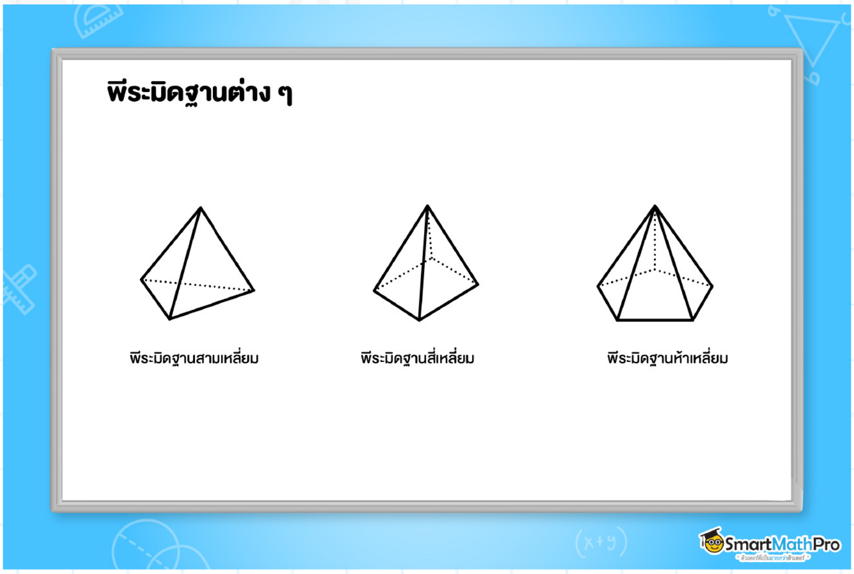
โดยทั่วไปเมื่อกล่าวถึง “พีระมิด” ภาพแรกที่เรานึกถึงมักจะเป็นพีระมิดในประเทศอียิปต์ ซึ่งฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส แต่ในทางคณิตศาสตร์และในชีวิตประจำวันไม่เป็นเช่นนั้น ฐานของพีระมิดไม่จำเป็นต้องมีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเสมอไป

ในทางคณิตศาสตร์ รูปเรขาคณิตที่มีฐานเป็นรูปเหลี่ยมใด ๆ มียอดแหลมที่ไม่อยู่บนระนาบเดียวกันกับฐาน และหน้าทุกหน้าเป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดร่วมกันที่ยอดแหลมนั้น เรียกว่า **พีระมิด (pyramid)**

ในระดับชั้นนี้เราจะกล่าวเฉพาะ**พีระมิดตรง (right pyramid)** ซึ่งเป็นพีระมิดที่มีส่วนสูงตั้งฉากกับฐานที่จุดศูนย์กลางของรูปหลายเหลี่ยมนั้น ๆ และเรียกจุดดังกล่าวว่า**เซนทรอยด์ (centroid)** โดยเราจะเรียกส่วนประกอบของปริซึมในแต่ละส่วน ดังรูปนี้

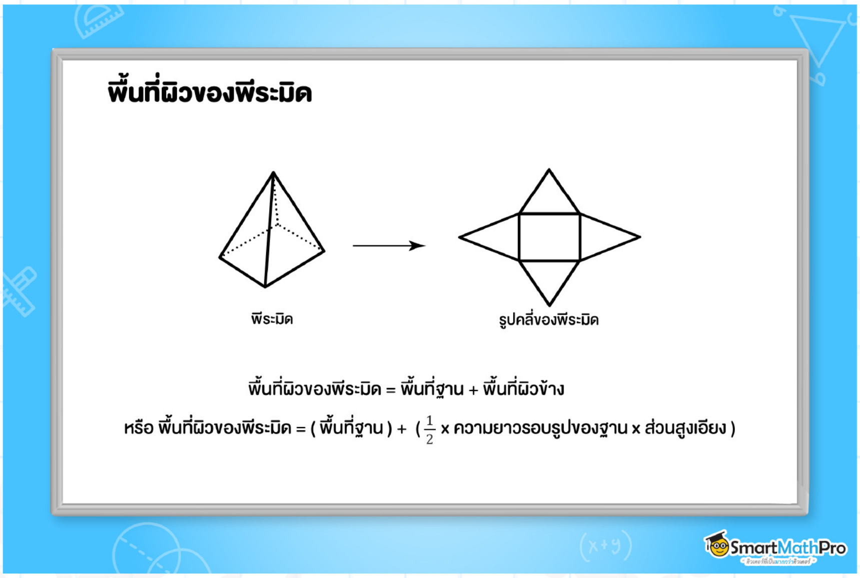


จะเรียกชื่อพีระมิดต่าง ๆ ตามลักษณะของฐานของพีระมิด ดังนี้



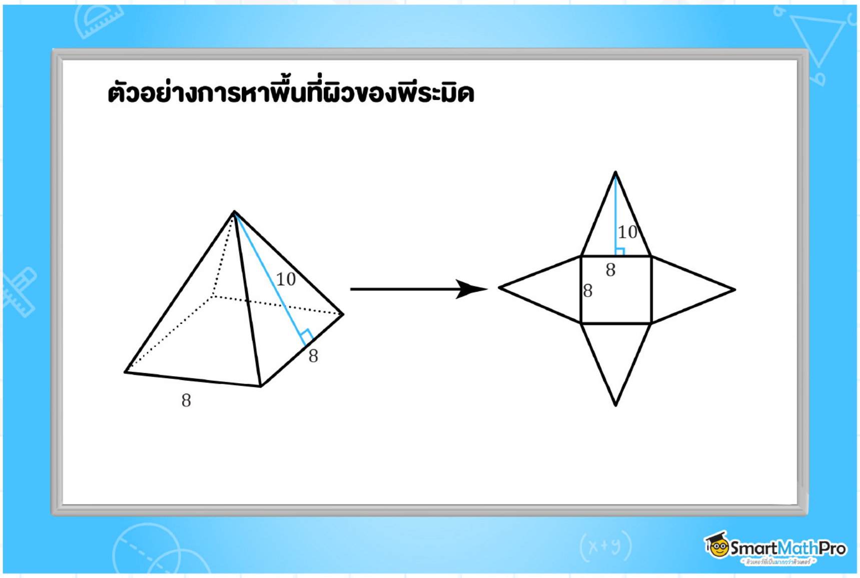
พื้นที่ผิวของพีระมิด

จากชั้น ม.2 น้อง ๆ เคยเรียนการหาพื้นที่ผิวของปริซึมและทรงกระบอกมาแล้ว การหาพื้นที่ผิวของพีระมิดสามารถคำนวณหาได้จากพื้นที่ฐานและพื้นที่ผิวข้างของรูปพีระมิด โดยการวาดของรูปคลี่ของพีระมิดได้เช่นกัน ลองพิจารณาการหาพื้นที่ผิวของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมต่อไปนี้



เพื่อให้น้อง ๆ เข้าใจการหาพื้นที่ผิวของพีระมิดและเห็นภาพมากขึ้น เราลองไปใช้สูตรผ่านตัวอย่างต่อไปนี้กัน

ตัวอย่างที่ 1 จากรูป จงหาพื้นที่ผิวของพีระมิดฐานสี่เหลี่ยมจัตุรัสต่อไปนี้



วิธีทำ จากรูป ฐานพีระมิดเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ที่มีทุกด้านยาว 8 หน่วย

จะได้ พื้นที่ฐาน $= 8 \times 8 = 64$ ตารางหน่วย

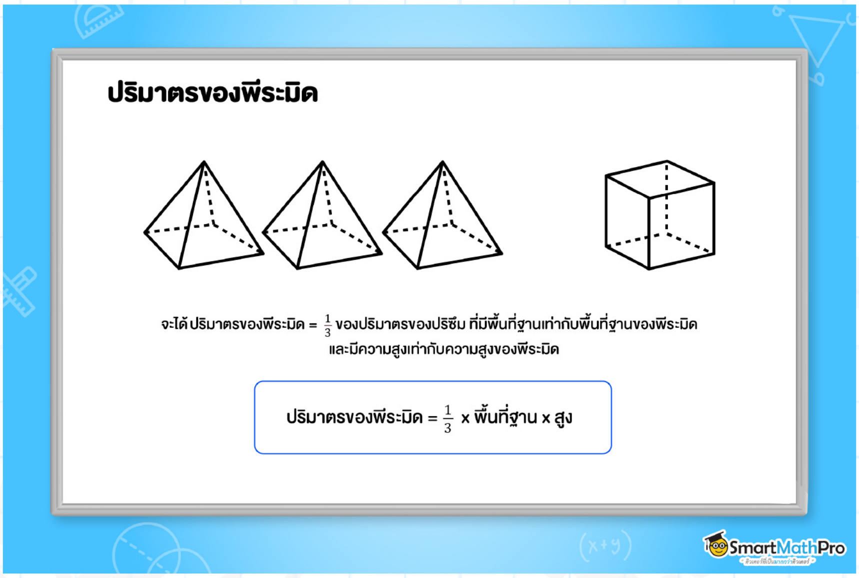
พื้นที่ผิวข้าง เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีฐานยาว 8 หน่วย และส่วนสูงเอียง 10 หน่วย ทั้งหมด 4 รูป

จะได้ พื้นที่ผิวข้าง $= \left(\frac{1}{2} \times 8 \times 10\right) \times 4 = 160$ ตารางหน่วย

ดังนั้น พื้นที่ผิวของพีระมิดนี้ คือ $64 + 160 = 224$ ตารางหน่วย

ปริมาตรของพีระมิด

แนวคิดการหาปริมาตรของพีระมิดได้มาจากการตวงทรายใส่พีระมิด แล้วนำไปเทใส่ปริซึมหนึ่ง ซึ่งพื้นที่ฐานของพีระมิดจะต้องเท่ากับพื้นที่ฐานของปริซึม และความสูงของพีระมิดจะต้องเท่ากับความสูงของปริซึมนั้น โดยต้องเททรายจากพีระมิดใส่ลงในปริซึมนั้น 3 ครั้ง จึงจะได้ทรายเต็มปริซึมพอดี



เพื่อให้น้อง ๆ เข้าใจมากขึ้น เราลองไปใช้สูตรผ่านตัวอย่างต่อไปนี้กัน

ตัวอย่างที่ 2 พีระมิดฐานสี่เหลี่ยมผืนผ้าหนึ่ง มีฐานกว้างและยาวเป็น 5 และ 6 เซนติเมตร ตามลำดับ ถ้าพีระมิดนี้สูง 12 เซนติเมตร แล้วปริมาตรของพีระมิดนี้เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ จากสูตร ปริมาตรของพีระมิด $= \frac{1}{3} \times$ พื้นที่ฐาน $\times$ สูง

พื้นที่ฐาน $= 5 \times 6 = 30$ ตารางเซนติเมตร

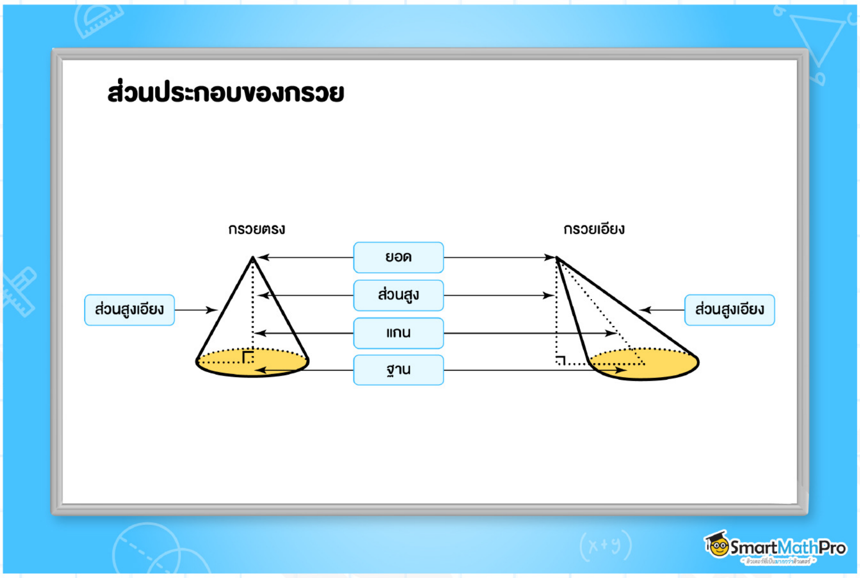
ดังนั้น ปริมาตรของพีระมิดนี้ คือ $\frac{1}{3} \times 30 \times 12 = 120$ ลูกบาศก์เซนติเมตร

กรวยคืออะไร ?

ในทางคณิตศาสตร์นิยามความหมายของกรวยไว้ดังนี้

> ในทางคณิตศาสตร์ รูปเรขาคณิตสามมิติที่มีฐานเป็นรูปวงกลม มียอดแหลมที่ไม่อยู่ในระนาบเดียวกันกับฐาน และเส้นที่ต่อระหว่างจุดที่เป็นยอดแหลมและจุดใด ๆ บนขอบของฐานเป็นส่วนของเส้นตรง เรียกว่า กรวย (cone)

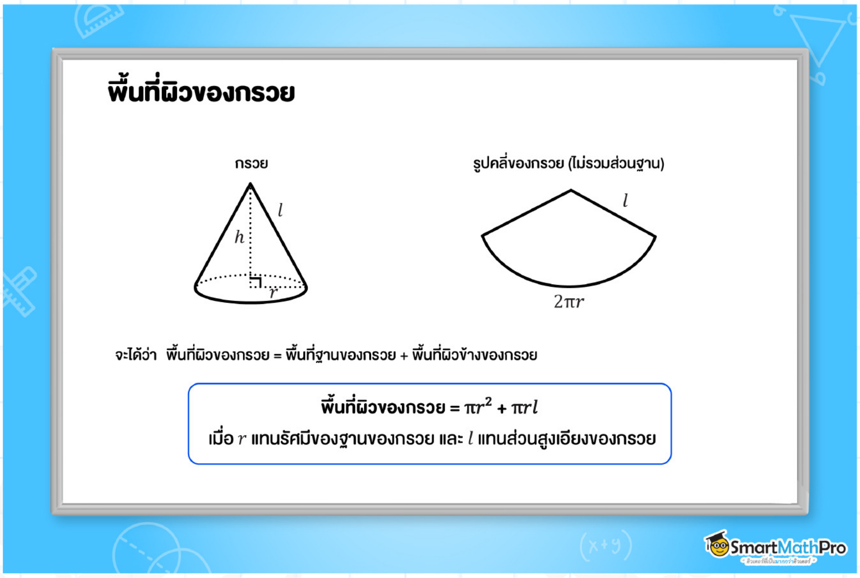
โดยเราจะเรียกส่วนประกอบของกรวยในแต่ละส่วน ดังรูปนี้



ในระดับชั้นนี้เราจะจะกล่าวถึง**กรวยตรง (right cone)** ที่อยู่ในรูปทางด้านซ้าย เป็นกรวยที่มีแกนตั้งฉากกับฐานที่จุดศูนย์กลางของฐานเท่านั้น

พื้นที่ผิวของกรวย

ถ้าตัดกรวยออกตามแนวส่วนสูงเอียง แล้วคลี่ออก สังเกตได้ว่าพื้นที่ผิวของกรวยจะแบ่งออกเป็นสองส่วน ได้แก่ ส่วนที่เป็นวงกลม คือ **พื้นที่ฐานของกรวย** และส่วนที่คล้ายกับรูปสามเหลี่ยม คือ **พื้นที่ผิวข้างของกรวย** ดังรูปด้านล่าง



เพื่อให้น้อง ๆ เข้าใจมากขึ้น เราลองไปใช้สูตรผ่านตัวอย่างต่อไปนี้กัน

ตัวอย่างที่ 3 กรวยอันหนึ่งมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 14 เซนติเมตร และสูงเอียงยาว 10 เซนติเมตร จงหาพื้นที่ผิวของกรวย (กำหนดให้ $\pi \approx \frac{22}{7}$)

วิธีทำ จากโจทย์ กรวยมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 14 เซนติเมตร

จะได้ว่า กรวยจะมีรัศมียาว $\frac{14}{2} = 7$ เซนติเมตร และสูงเอียงยาว 10 เซนติเมตร

นั่นคือ กรวยนี้มี $r = 7$ และ $l = 10$

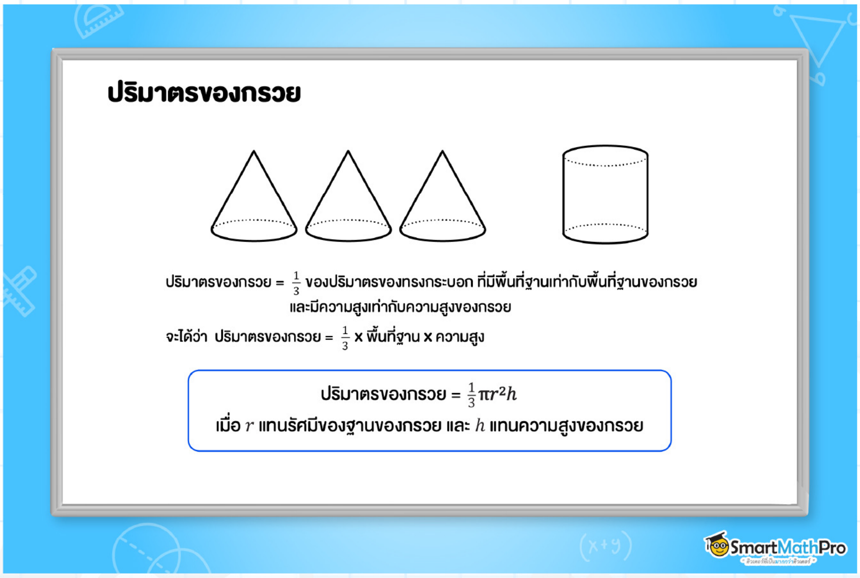
จากสูตรพื้นที่ผิวของกรวย $= \pi r^2 + \pi rl$

เมื่อแทนค่าลงในสูตร จะได้ พื้นที่ผิวของกรวย

ประมาณ $\left(\frac{22}{7} \times 7 \times 7\right) + \left(\frac{22}{7} \times 7 \times 10\right) \approx 374$ ตารางเซนติเมตร

ปริมาตรของกรวย

จากที่ทราบความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตรของพีระมิดและปริมาตรของปริซึมซึ่งมีพื้นที่ฐานเท่ากัน และส่วนสูงเท่ากันมาแล้ว ความสัมพันธ์ของปริมาตรของกรวยและทรงกระบอกก็เป็นไปในทำนองเดียวกัน



เพื่อให้น้อง ๆ เข้าใจมากขึ้น เราลองไปใช้สูตรผ่านตัวอย่างต่อไปนี้กัน

ตัวอย่างที่ 4 พี่บอสต้องการทำชาไทยแจกน้อง ๆ จำนวน 20 คน โดยแต่ละคนจะใช้แก้วกรวยกระดาษที่มีรัศมี 4 เซนติเมตร และสูง 6 เซนติเมตร พี่บอสต้องทำชาไทยทั้งหมดประมาณกี่ลูกบาศก์เซนติเมตร (กำหนดให้ 3.14)

วิธีทำ จากสูตร ปริมาตรของกรวย $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

เมื่อแทนค่าลงในสูตร จะได้ว่า

ปริมาตรของแก้วกรวยกระดาษ $\approx \frac{1}{3} \times 3.14 \times 4^2 \times 6 \approx 100.48$ ลูกบาศก์เซนติเมตร

จากโจทย์ ต้องการแจกน้อง ๆ จำนวน 20 คน

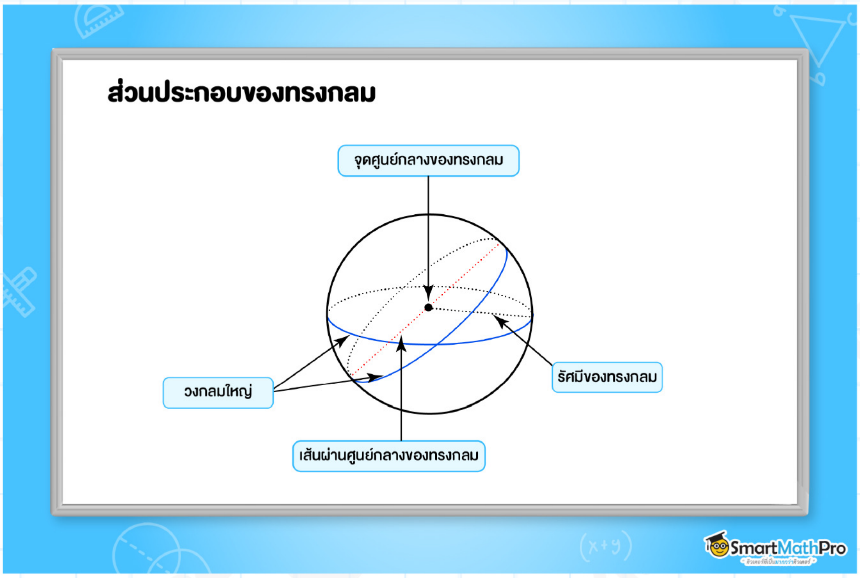
ดังนั้น พี่บอสต้องทำชาไทยทั้งหมดประมาณ $100.48 \times 20 \approx 2{,}009.6$ ลูกบาศก์เซนติเมตร

ทรงกลม

ทรงกลมเป็นรูปเรขาคณิตสามมิติซึ่งน้อง ๆ อาจจะพบเห็นได้บ่อยในชีวิตประจำวัน ทั้งพบได้จากสิ่งที่มนุษย์สร้างขึ้น และสิ่งที่มีอยู่ในธรรมชาติ หรือมีบางสิ่งที่มีลักษณะคล้ายทรงกลมด้วย เช่น ลูกบอล ส้ม ลูกโลก

ในทางคณิตศาสตร์ รูปเรขาคณิตสามมิติที่มีผิวโค้งเรียบ และจุดทุกจุดบนผิวโค้งอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งเป็นระยะเท่ากัน เรียกว่า **ทรงกลม (sphere)** จุดคงที่นั้นเรียกว่า จุดศูนย์กลางของทรงกลม ระยะที่เท่ากันนั้นเรียกว่า รัศมีของทรงกลม

โดยเราจะเรียกส่วนประกอบของทรงกลมในแต่ละส่วน ดังรูปนี้



พื้นที่ผิวของทรงกลม

แนวคิดของการประมาณพื้นที่ผิวโค้งของทรงกลมจะทำได้โดยการแบ่งผิวโค้งออกเป็นรูปหลายเหลี่ยม เช่น ลูกฟุตบอลในภาพด้านล่างนี้เกิดจากการที่เรานำรูปห้าเหลี่ยมและหกเหลี่ยมมาประกอบกันเป็นทรงกลม หากเราหาพื้นที่ของรูปห้าเหลี่ยมและรูปหกเหลี่ยมย่อยเหล่านี้จะได้ นั่นหมายถึงว่าเราจะหาพื้นที่ผิวของทรงกลมได้

แต่เมื่อลองแกะรูปห้าเหลี่ยมและหกเหลี่ยมย่อยของลูกฟุตบอลออกมาจะพบว่ารูปห้าเหลี่ยมและหกเหลี่ยมนั้นยังมีพื้นผิวที่โค้ง ไม่แบนราบ นั่นหมายความว่าการหาพื้นที่ผิวของทรงกลมก็ยังค่อยไม่แม่นยำ

ถ้าเราต้องการให้หาพื้นที่ผิวของทรงกลมให้แม่นยำมากขึ้นจะต้องแบ่งพื้นที่ผิวของทรงกลมให้เป็นรูปหลายเหลี่ยมย่อยให้มากที่สุด ไม่ว่าจะเป็นพันรูป หมื่นรูปก็ตาม ยิ่งแบ่งย่อยได้เท่าไรการหาพื้นที่ผิวทรงกลมนี้ก็จะแม่นยำมากขึ้นเท่านั้น

โดยทั่วไปแล้วสูตรการหาพื้นที่ผิวของทรงกลมเป็นดังนี้

พื้นที่ผิวของทรงกลม $= 4\pi r^2$
เมื่อ r **แทนรัศมีของทรงกลม**

เพื่อให้น้อง ๆ เข้าใจมากขึ้น เราลองไปใช้สูตรผ่านตัวอย่างต่อไปนี้กัน

<u>**ตัวอย่างที่ 5**</u> โนบิตะกำลังทำโคมไฟกระดาษรูปทรงกลมปิด โดยมีความยาวรอบทรงกลมนี้ 88 เซนติเมตร (วัดจากบริเวณที่กว้างที่สุดของโคมไฟ) พื้นที่ผิวของโคมไฟนี้เท่ากับเท่าใด (กำหนดให้ $\pi \approx \frac{22}{7}$)

<u>**วิธีทำ**</u> จากสูตร ความยาวเส้นรอบวง $= 2\pi r$

จะได้ว่า $88 = 2 \times \frac{22}{7} \times r$

นั่นคือ $r = 14$

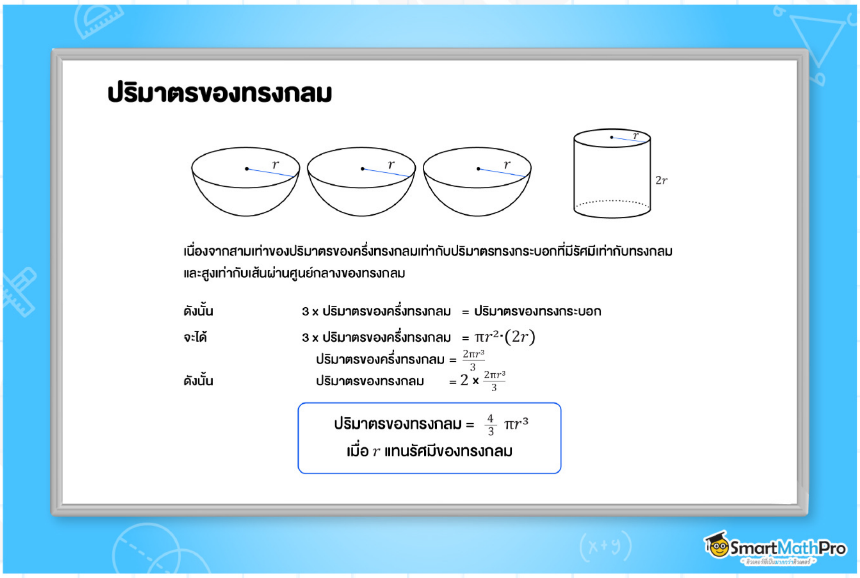
จากสูตร พื้นที่ผิวของทรงกลม $= 4\pi r^2$

เมื่อแทนค่าลงในสูตร จะได้ว่า $4 \times \frac{22}{7} \times 14^2 \approx 2{,}464$

ดังนั้น พื้นที่ผิวของโคมไฟนี้ ประมาณ 2,464 ตารางเซนติเมตร

ปริมาตรของทรงกลม

การหาปริมาตรรูปเรขาคณิตสามมิติก่อนหน้านี้ไม่ว่าจะเป็นพีระมิดหรือกรวย เราอาจใช้การตวงทราย ซึ่งอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างพีระมิดและปริซึม กรวยและทรงกระบอกมาแล้ว เพื่อให้ได้แนวคิดในการหาปริมาตรของทรงกลม เราจะพิจารณาปริมาตรของครึ่งทรงกลมและทรงกระบอก ดังนี้



ตัวอย่างที่ 6 ลูกชิ้นจัมโบ้ 9 ลูก มีปริมาตรรวมกันเท่ากับ 1,617 ลูกบาศก์เซนติเมตร แล้วความยาวของรัศมีของลูกชิ้นลูกหนึ่งเท่ากับกี่เซนติเมตร (กำหนดให้ $\pi \approx \frac{22}{7}$)

วิธีทำ ลูกชิ้นจัมโบ้ 1 ลูก จะมีปริมาตร $\frac{1{,}617}{9}$ ลูกบาศก์เซนติเมตร

จากสูตร ปริมาตรของทรงกลม $= \frac{4}{3}\pi r^3$

เมื่อแทนค่าลงในสูตร จะได้ $\frac{1{,}617}{7} \approx \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times r^3$

จะได้ว่า $r^3 \approx 42.875$

นั่นคือ $r \approx 3.5$

ดังนั้น ความยาวของรัศมีของลูกชิ้นลูกหนึ่ง ประมาณ 3.5 เซนติเมตร

ตัวอย่างที่ 7 ถ้านำโลหะตันทรงกลมที่มีความยาวรัศมี 3 เซนติเมตร จำนวน 4 ลูก มาหลอมใหม่ทำเป็นโลหะตันทรงกรวยที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางของฐานยาว 12 เซนติเมตร แล้วโลหะตันทรงกรวยนี้จะสูงเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ จากสูตร ปริมาตรของทรงกลม $= \frac{4}{3}\pi r^3$

จะได้ ปริมาตรโลหะตันทรงกลมมีความยาวรัศมี 3 เซนติเมตร

คือ $= \frac{4}{3}\pi(3)^3 = 36\pi$ ลูกบาศก์เซนติเมตร

โลหะตันทรงกลม มีจำนวน 4 ลูก จะมีปริมาตรทั้งหมด เท่ากับ $36\pi \times 4 = 144\pi$ ลูกบาศก์เซนติเมตร

นำมาหลอมใหม่ทำเป็นโลหะตันทรงกรวยที่มีปริมาตรเท่ากัน คือ 144π ลูกบาศก์เซนติเมตร

จากโจทย์ โลหะตันทรงกรวย มีเส้นผ่านศูนย์กลางของฐานยาว 12 เซนติเมตร

นั่นคือ โลหะตันทรงกรวยจะมีรัศมี $\frac{12}{2} = 6$ เซนติเมตร

จากสูตร ปริมาตรของกรวย $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

เมื่อแทนค่าลงในสูตร จะได้ว่า $144\pi = \frac{1}{3}\pi(6)^2 h$

$h = \frac{144\pi \times 3}{36\pi}$

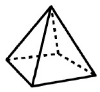
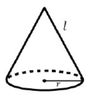
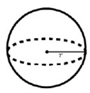
นั่นคือ $h = 12$

ดังนั้น โลหะตันทรงกรวยนี้สูง 12 เซนติเมตร

รวมสูตรพื้นที่ผิวและปริมาตร (พีระมิด กรวย ทรงกลม) ม.3

เราสามารถสรุปสูตรทั้งหมด 6 สูตรที่ได้เรียนมา ดังนี้

พื้นที่ผิวและปริมาตรของพีระมิด กรวย ทรงกลม

	พื้นที่ผิว	ปริมาตร
พีระมิด 	(พื้นที่ฐาน) + ($\frac{1}{2}$ x ความยาวรอบรูปของฐาน x ส่วนสูงเอียง)	$\frac{1}{3}$ x พื้นที่ฐาน x สูง
กรวย 	$\pi r^2 + \pi r l$ เมื่อ r แทนรัศมีของฐานของกรวย และ l แทนส่วนสูงเอียงของกรวย	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$ เมื่อ r แทนรัศมีของฐานของกรวย และ h แทนความสูงของกรวย
ทรงกลม 	$4\pi r^2$ เมื่อ r แทนรัศมีของวงกลม	$\frac{4}{3}\pi r^3$ เมื่อ r แทนรัศมีของวงกลม

“เวลาที่ดีที่สุดในการเริ่มต้น คือ **ตอนนี้**”

- พี่ปั้น SmartMathPro -

สนใจติวคณิตศาสตร์เพิ่มเติม online.smartmathpro.com