เมทริกซ์ ม.5

เมทริกซ์ คืออะไร ?

จากในชีวิตประจำวันน้อง ๆ น่าจะเคยเห็นการนำเสนอข้อมูลผ่านตารางมาบ้างแล้ว ในทางคณิตศาสตร์การใช้ตารางก็คือวิธีหนึ่งในการนำเสนอข้อมูลและจัดการข้อมูล โดยเราจะนำข้อมูลที่อยู่ในรูปตารางมาเขียนให้อยู่ภายใต้วงเล็บ (   ) หรือ [   ] ก็ได้ แต่ว่าในบทเรียนที่น้อง ๆ จะได้เรียนในบทนี้เราจะใช้วงเล็บแบบเหลี่ยม [   ] และเราจะเรียกว่า "เมทริกซ์"

พิจารณาตารางแสดงผลการแพ้ชนะ ของรายการแข่งเดินแบบของผู้เข้าแข่งขัน 3 คน ดังนี้

ผลการแข่งขัน / ผู้เข้าแข่งขัน	ชนะ	Safe	ตกรอบ
จุ๋ม	1	2	1
จุก	2	1	1
จุ้ม	0	3	1

SmartMathPro

จากตารางข้างต้นถ้าเราลองนำมาเขียนให้เป็นเมทริกซ์ ก็เพียงแค่นำข้อมูลมาใส่ไว้ในกรอบ [ ] ก็จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

เราก็พอจะเห็นกันคร่าว ๆ แล้วใช่ไหม ว่าเมทริกซ์มีรูปร่างหน้าตาเป็นอย่างไรบ้าง เราไปทำความรู้จักเมทริกซ์เพิ่มเติมในหัวข้อถัดไปกันเถอะ

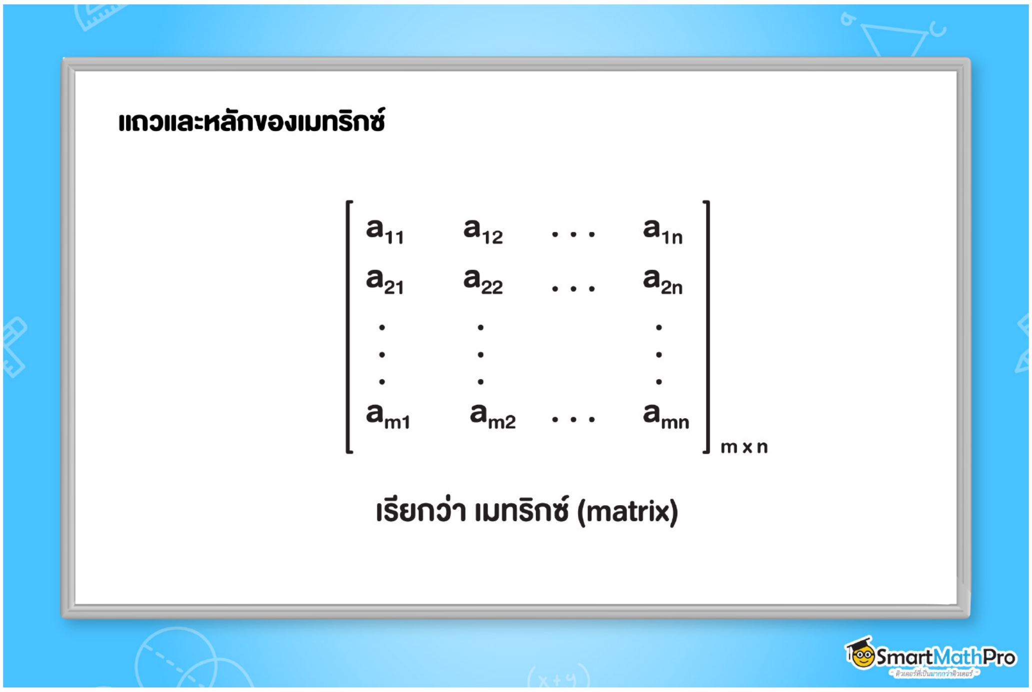
ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเมทริกซ์

แถวและหลักของเมทริกซ์

บทนิยามต่อไปนี้จะกล่าวถึงส่วนประกอบต่าง ๆ ของเมทริกซ์นะ โดยคำศัพท์ทั้งหลายมักจะใช้ไปตลอดทั้งบทนี้เลย ไม่ว่าจะเป็น “แถว” “หลัก” หรือคำศัพท์อื่น ๆ อย่าง “สมาชิก” “ขนาด” “มิติ” เพื่อให้เราเข้าใจได้ตรงกันและเรียกชื่อส่วนต่าง ๆ ได้ถูกต้อง ลองไปดูบทนิยามด้วยกันเลยย

บทนิยาม

ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ชุดของจำนวนจริง mn จำนวน ซึ่งเรียงกันในรูป



จากรูปชุดของสมาชิกที่เขียนในแนวนอน เรียกว่า **แถว (row)** ของเมทริกซ์ซึ่งมีทั้งหมด m แถว
ชุดของสมาชิกที่เขียนในแนวตั้ง เรียกว่า **หลัก (column)** ของเมทริกซ์ ซึ่งมีทั้งหมด n หลัก
เรียก a_{ij} ว่าเป็น **สมาชิก (entry)** ในแถวที่ i และหลักที่ j ของเมทริกซ์
ถ้าเมทริกซ์มี m แถว n หลัก จะเรียก $m \times n$ ว่า **ขนาด (size)** หรือ **มิติ (dimension)** ของเมทริกซ์

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ จงหา

1. a_{12}

วิธีทำ จาก a_{12} คือสมาชิกในแถวที่ 1 หลักที่ 2

จะได้ว่า $a_{12} = 2$

2. a_{13}

วิธีทำ จาก a_{13} คือสมาชิกในแถวที่ 1 หลักที่ 3

จะได้ว่า $a_{13} = 0$

3. a_{22}

วิธีทำ จาก a_{22} คือสมาชิกในแถวที่ 2 หลักที่ 2

จะได้ว่า $a_{22} = 4$

การเท่ากันของเมทริกซ์

เมทริกซ์สองเมทริกซ์จะเท่ากันได้ต้องมีลักษณะตามนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม

ให้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{p \times q}$

A เท่ากับ B ก็ต่อเมื่อ $m = p, n = q$ และ $a_{ij} = b_{ij}$ สำหรับทุก $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$

และ $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ เขียนแทน A เท่ากับ B ด้วย $A = B$

จากบทนิยามข้างต้นถ้าพี่จะสรุปให้น้องเข้าใจได้ง่าย ๆ ก็คือ

เมทริกซ์จะเท่ากันได้ต้องมีขนาดเท่ากัน และในสมาชิกตำแหน่งเดียวกันต้องมีค่าเท่ากัน

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ y-1 & 3 \end{bmatrix}$ ค่าของ x และ y

แนวคิด จากการเท่ากันของเมทริกซ์ สมาชิกในตำแหน่งเดียวกันต้องมีค่าเท่ากัน ให้น้อง ๆ นำสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันมาเชื่อมด้วยเครื่องหมายเท่ากับ และแก้สมการหาค่าของ x และ y

วิธีทำ จากบทนิยาม

จะได้ว่า $x = 2$

และ $y - 1 = 0$ นั่นคือ $y = 1$

ดังนั้น $x = 2$ และ $y = 1$

เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (transpose of a matrix)

น้อง ๆ บางคนอาจจะเคยได้ยินหรือคุ้นชินกับเมทริกซ์สลับเปลี่ยนในอีกชื่อหนึ่งคือ transpose of a matrix ซึ่ง transpose (ทรานสโพส) หมายถึงการเปลี่ยนตำแหน่ง ในหัวข้อนี้เราจะมาสลับตำแหน่งของสมาชิกในเมทริกซ์กัน โดยมาดูนิยามของเมทริกซ์สลับเปลี่ยนกันก่อนว่าตำแหน่งของสมาชิกในเมทริกซ์จะเปลี่ยนไปอย่างไรบ้าง

บทนิยาม

ให้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{p \times q}$ โดยที่ $b_{ij} = a_{ij}$

สำหรับทุก $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ และ $j \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ แล้วจะเรียก B ว่า เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (transpose of a matrix) ของ A เขียนแทนด้วย A^t

จากบทนิยามในกรอบข้างต้นถ้าพี่จะสรุปให้เข้าใจกันแบบง่าย ๆ ก็จะได้ว่า

เมทริกซ์สลับเปลี่ยน คือ การเรียงสมาชิกใหม่ โดยนำแถวไปเป็นหลัก นำหลักไปเป็นแถว

ตัวอย่างที่ 3 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ จงหา A^t

วิธีทำ จะได้ว่า $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

สมบัติของเมทริกซ์สลับเปลี่ยน

- $(A^t)^t = A$
- $(cA)^t = cA^t$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริง
- $(A + B)^t = A^t + B^t$
- $(AB)^t = B^tA^t$

ในสมบัติข้อสุดท้าย ต้องอย่าลืมสลับที่ A กับ B ให้เป็นแบบในสมบัติที่พี่เขียนด้วย ไม่งั้นจะผิดได้

พีชคณิตของเมทริกซ์

การบวกและการลบเมทริกซ์

ในหัวข้อนี้ พี่จะเริ่มพาน้อง ๆ มาดูการดำเนินการแบบง่าย ๆ กันก่อน นั่นคือการบวกและการลบเมทริกซ์ซึ่งจะเป็นตามบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม

ให้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน

ผลบวกของเมทริกซ์ A กับเมทริกซ์ B คือ $[c_{ij}]_{m \times n}$ เมื่อ $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

สำหรับทุก $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ และ $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ เขียนแทน A บวก B

ด้วย $A + B$ นั่นคือ $[a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$

จากนิยามข้างต้นสามารถอธิบายแบบง่าย ๆ ภาษาชาวบ้านหนึ่ง ได้ว่า **เมทริกซ์ขนาดเท่ากันในตำแหน่งเดียวกัน สามารถนำมาบวกหรือลบกันได้** นั่นก็คือเมทริกซ์ที่มีขนาดไม่เท่ากันจะนำมาบวกกันไม่ได้

ตัวอย่างที่ 4 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ จงหา

1. $A + B$

วิธีทำ $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1+0 & 0+1 & -1+3 \\ -2+4 & 3+(-1) & 2+(-3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

2. $A - B$

วิธีทำ $A - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1-0 & 0-1 & -1-3 \\ -2-4 & 3-(-1) & 2-(-3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

การคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริง

การคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริงก็ไม่ยากเลย ขั้นตอนการทำไม่ซับซ้อน ก่อนอื่นไปพิจารณาบทนิยามต่อไปนี้กัน

บทนิยาม

ให้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ c เป็นจำนวนจริง

ผลคูณของ c กับเมทริกซ์ A คือ เมทริกซ์ $[b_{ij}]_{m \times n}$ เมื่อ $b_{ij} = ca_{ij}$

สำหรับทุก $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ และ $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ เขียนแทนผลคูณของ c

กับเมทริกซ์ A ด้วย cA จะได้ว่า $c[a_{ij}]_{m \times n} = [ca_{ij}]_{m \times n}$

จากบทนิยามข้างบนนี้ เราสามารถทำความเข้าใจการคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริงได้แบบสั้น ๆ ดังนี้

ให้นำจำนวนจริงนั้น คูณสมาชิกทุกตัวในเมทริกซ์

ตัวอย่างที่ 5 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ จงหา $-5A$

วิธีทำ $-5A = \begin{bmatrix} -5\times 1 & -5\times 2 \\ -5\times 0 & (-5)\times(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -10 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

น้อง ๆ คนไหนที่เคยเรียนบทเมทริกซ์แล้ว มาย้อนอ่านบทความนี้ก็จะรู้ว่าส่วนใหญ่เราจะมองว่าการคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์มันทำความเข้าใจได้ยาก แต่น้อง ๆ คนไหนที่เพิ่งมาทำความรู้จักกับบทเมทริกซ์ด้วยกันตรงนี้ก็อย่าเพิ่งตกใจไปนะ

การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์มันซับซ้อนกว่าหัวข้อที่ผ่านมาก็จริง แต่เราทำได้แน่นอน แค่ต้องเพิ่มความรอบคอบในการคิดคำนวณเท่านั้นเอง การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์จะเป็นอย่างไร มาเริ่มดูที่บทนิยามกันก่อนเลย

บทนิยาม

ให้ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{p\times q}$

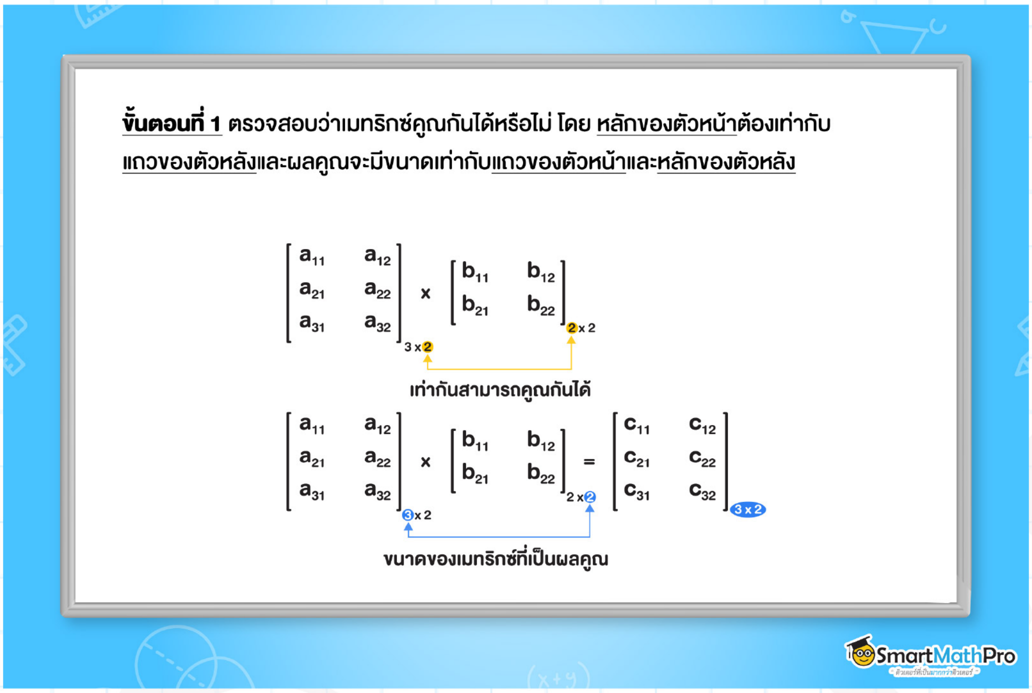
ผลคูณของเมทริกซ์ A และ B เขียนแทนด้วย AB จะนิยามได้ ก็ต่อเมื่อ $n = p$

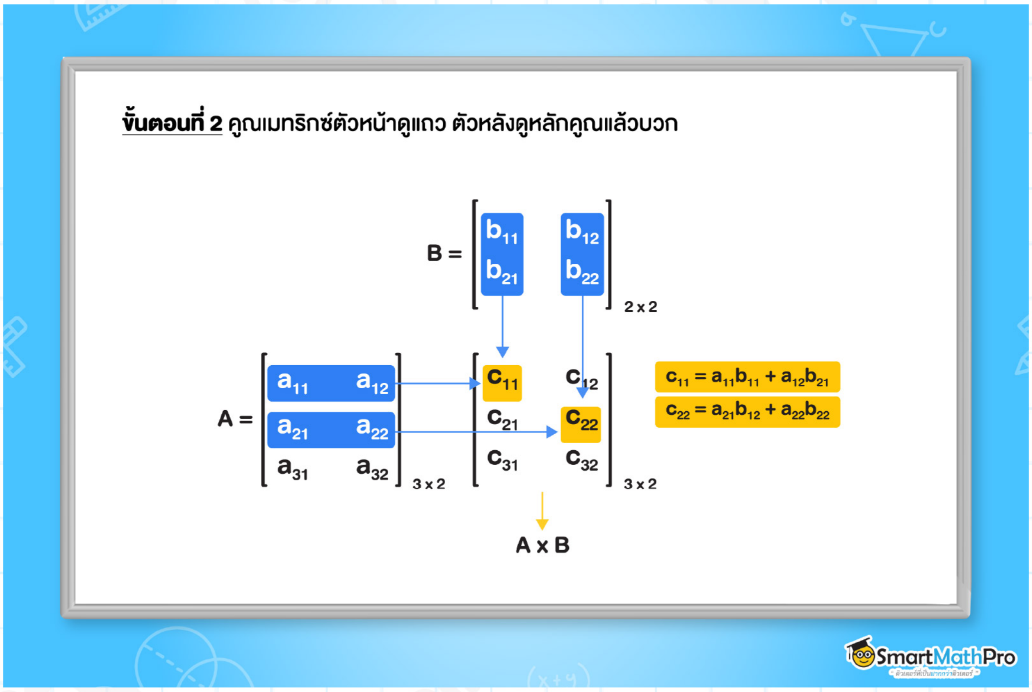
และเมทริกซ์ผลคูณ AB จะมีขนาด $m \times q$ ซึ่งมีสมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ j เป็น

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

สำหรับทุก $i \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ และ $j \in \{1, 2, 3, \ldots, q\}$

เพื่อให้เราทำความเข้าใจตามบทนิยามกันง่ายขึ้น ลองมาแบ่งวิธีการ คูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์จากนิยามข้างต้นแบบเป็นขั้นตอน 2 ขั้นตอนดังต่อไปนี้กัน





สังเกตได้ว่า ถ้าเราต้องการหาผลคูณของสมาชิกที่อยู่ในแถวที่ 1 และหลักที่ 1 นั่นคือ c_{11} จะต้องนำสมาชิกในแถวที่ 1 ของเมทริกซ์ A มาดำเนินการกับสมาชิกในหลักที่ 1 ของเมทริกซ์ B ในทำนองเดียวกัน ถ้าเราอยากหาผลคูณของสมาชิกที่อยู่ในแถวที่ 2 หลักที่ 1 นั่นคือ c_{21} จะต้องนำสมาชิกในแถวที่ 2 ของเมทริกซ์ A มาดำเนินการกับสมาชิกในหลักที่ 1 ของเมทริกซ์ B

<u>**ตัวอย่างที่ 6**</u> กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา AB

<u>**วิธีทำ**</u>

ขั้นตอนที่ 1 ตรวจสอบว่าเมทริกซ์คูณกันได้หรือไม่

เมทริกซ์ A มีมิติเป็น 2×2 และเมทริกซ์ B มีมิติเป็น 2×2

ดังนั้นสามารถนำ A มาคูณกับ B ได้ โดยจะได้เมทริกซ์ AB ซึ่งเป็นคำตอบจะมีมิติเป็น 2×2

ขั้นตอนที่ 2 คูณเมทริกซ์

$$AB = \begin{bmatrix} (2)(0)+(1)(3) & (2)(-1)+(1)(1) \\ (-1)(0)+(0)(3) & (-1)(-1)+(0)(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>**ตัวอย่างที่ 7**</u> กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา AB

<u>**วิธีทำ**</u>

ขั้นตอนที่ 1 ตรวจสอบว่าเมทริกซ์คูณกันได้หรือไม่

เมทริกซ์ A มีมิติเป็น 2×2 และเมทริกซ์ B มีมิติเป็น 2×2

ดังนั้นสามารถนำ A มาคูณกับ B ได้ โดยจะได้เมทริกซ์ AB ซึ่งเป็นคำตอบจะมีมิติเป็น 2×2

ขั้นตอนที่ 2 คูณเมทริกซ์

$$AB = \begin{bmatrix} (-1)(1)+(1)(0) & (-1)(0)+(1)(1) \\ (3)(1)+(2)(0) & (3)(0)+(2)(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นว่าเมื่อเรานำเมทริกซ์ A ไปคูณกับเมทริกซ์ B จะได้เมทริกซ์ที่เป็นคำตอบออกมาเป็นเมทริกซ์ที่หน้าตาเหมือนเมทริกซ์ A เลย นั่นก็เพราะว่าเมทริกซ์ B ในตัวอย่างก่อนหน้านั้นเป็น **“เมทริกซ์เอกลักษณ์”** ไม่ว่าเราจะนำเมทริกซ์ใดมาคูณกับมันก็จะได้เมทริกซ์เดิมเสมอเลย

เมทริกซ์เอกลักษณ์

เมทริกซ์เอกลักษณ์

ตัวอย่างของเมทริกซ์เอกลักษณ์ ได้แก่

$$I_1 = [1],\ I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

สมบัติของการคูณของเมทริกซ์	
เปลี่ยนกลุ่ม	$A(BC) = (AB)C$
คูณด้วยเมทริกซ์ศูนย์	$\underline{0}A = \underline{0}$ และ $A\underline{0} = \underline{0}$
เอกลักษณ์	$I_nA = A$ และ $AI_n = A$
คูณด้วยค่าคงที่	$(cA)B = A(cB) = c(AB)$
แจกแจง	$A(B+C) = AB+AC$ และ $(B+C)A = BA+CA$
ยกกำลัง	$\underbrace{AAA\cdots A}_{k\text{ ตัว}} = A^k$

หมายเหตุ : $AB \neq BA$ ไม่มีสมบัติสลับที่

ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์

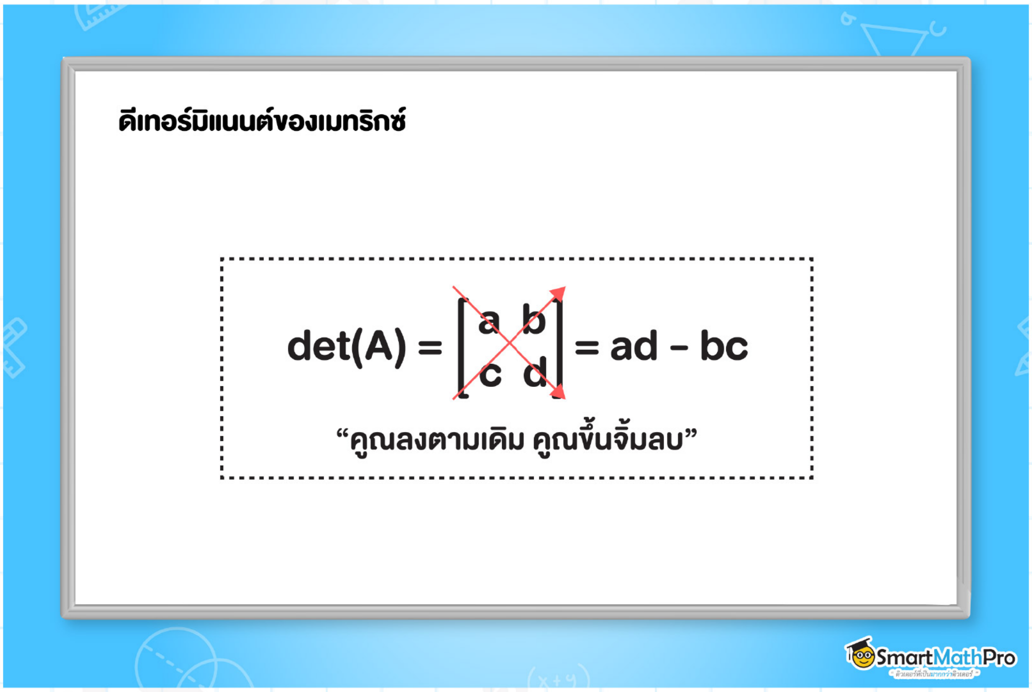
มาทำความรู้จักดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์จากบทนิยามกันก่อน โดยที่สัญลักษณ์ที่เราจะใช้แทนดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ A ก็คือ $\det(A)$ หรือ $|A|$

ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่มีขนาด 2×2

บทนิยาม

ให้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ จะได้ ดีเทอร์มิแนนต์ของ A คือ $ad - bc$

จากบทนิยามทั้งหมด เพื่อให้น้อง ๆ จำการหาดีเทอร์มิแนนต์ได้ง่ายขึ้น พี่มีเทคนิคการจำมาให้ด้วยการหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่มีมิติ 2×2 ก็คือให้เรามองว่ามันคือจำนวนจริงที่เกิดจากการนำสมาชิกที่อยู่ในแนวทแยงมาคูณกันและลบกันดังนี้

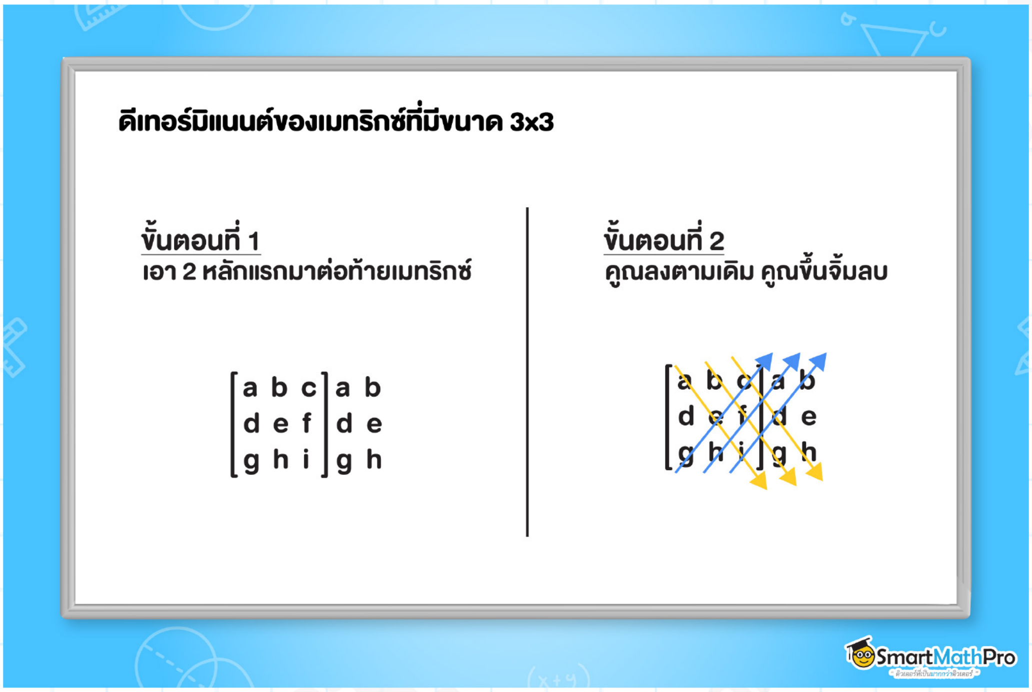


ตัวอย่างที่ 8 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ จงหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ A

วิธีทำ $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (0)(-1) = 6$

ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่มีขนาด 3×3

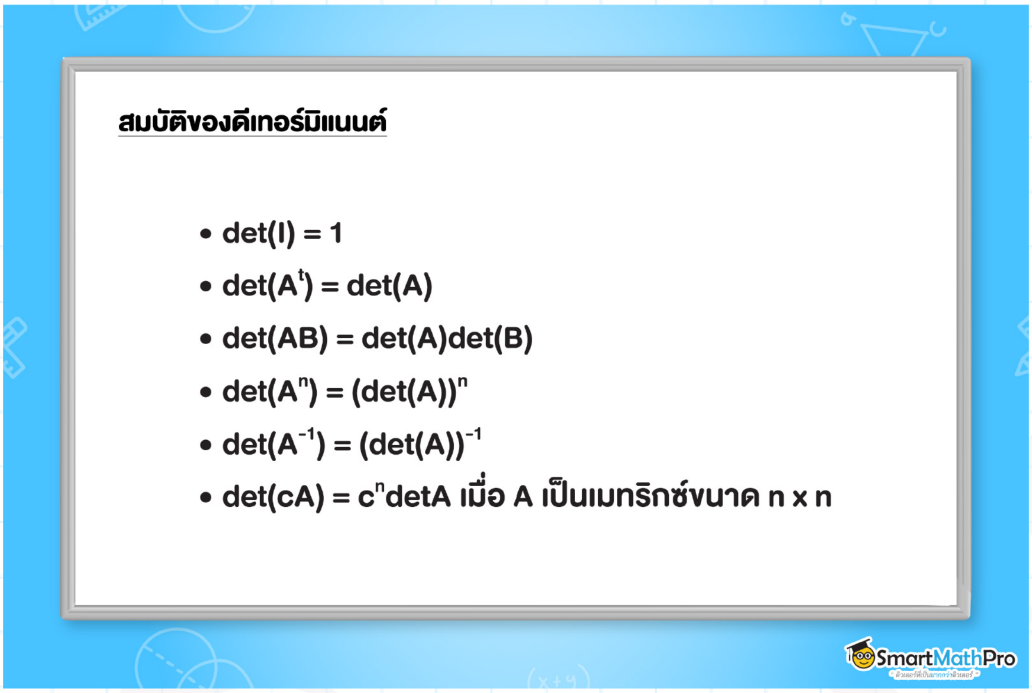
ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่มีขนาด 3×3 จะค่อนข้างซับซ้อนขึ้นมามากกว่าการหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2 น้อง ๆ บางคนอาจรู้จักวิธีการหาดีเทอร์มิแนนต์ด้วยการ “กระจายตามแถว” แต่ในบทความนี้พี่จะขอกล่าวถึงวิธีต่อไปนี้ ซึ่งทำความเข้าใจได้ง่าย มีเพียง 2 ขั้นตอนในการหาดีเทอร์มิแนนต์เท่านั้น ลองไปดูกันเลย



ตัวอย่างที่ 9 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ จงหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ A

วิธีทำ $\det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right|$

$$= [(1)(1)(1) + (0)(-2)(3) + (-1)(0)(1)] - [(3)(1)(-1) + (1)(-2)(1) + (1)(0)(0)]$$
$$= (1 + 0 + 0) - (-3 - 2 + 0)$$
$$= 1 + 5$$
$$= 6$$



เมทริกซ์ผกผัน

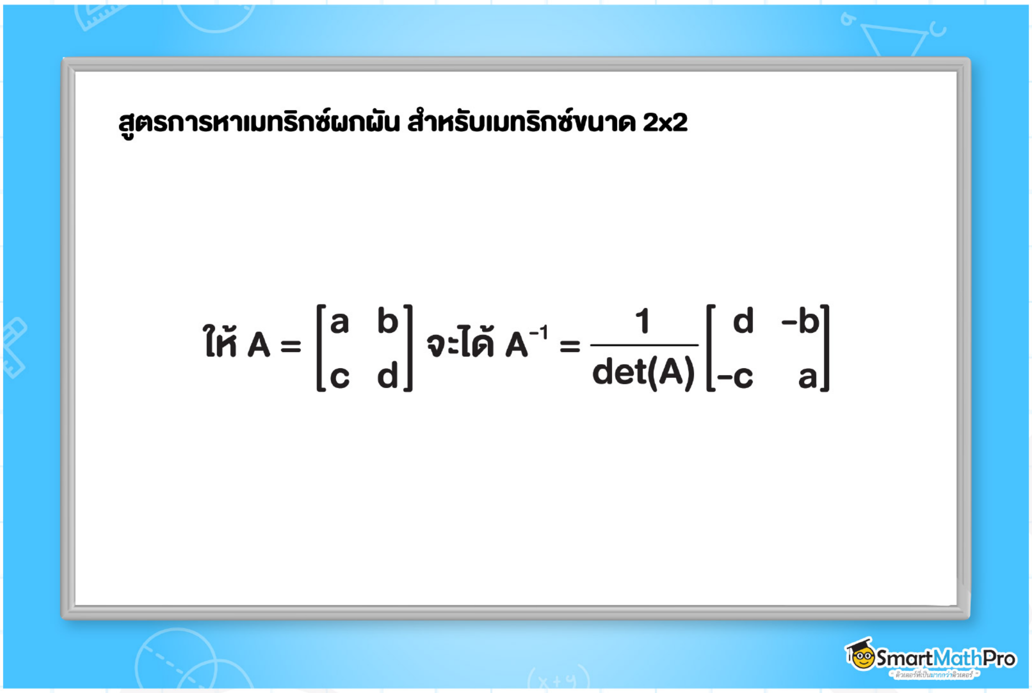
ในหัวข้อนี้จะมาศึกษาเกี่ยวกับเมทริกซ์ผกผันกัน พี่ขอพูดถึงความรู้เดิมของน้อง ๆ ในบทจำนวนจริงก่อน จากตัวผกผันการคูณของ 5 คือ $\frac{1}{5}$ เนื่องจาก $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$ ซึ่ง 1 เป็นเอกลักษณ์การคูณ ในทำนองเดียวกัน หัวข้อนี้เราจะหาเมทริกซ์ซึ่งคูณกับเมทริกซ์ A แล้วได้ เมทริกซ์เอกลักษณ์ I_n กัน โดยเมทริกซ์ที่หามาได้เราจะเรียกว่าเมทริกซ์ผกผัน ตามนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม

ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ถ้ามีเมทริกซ์ B ขนาด $n \times n$ ซึ่ง $AB = BA = I_n$

B คือเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ A และเขียนแทนด้วย A^{-1}

เมทริกซ์ที่สามารถหาเมทริกซ์ผกผัน จะนิยามเฉพาะเมทริกซ์จัตุรัสเท่านั้น และเมทริกซ์นั้น จะมีเมทริกซ์ผกผันเพียงเมทริกซ์เดียว โดยที่เราจะมีสูตรการหาเมทริกซ์ผกผันเป็นดังนี้



แล้วทุกเมทริกซ์จัตุรัสจะมีเมทริกซ์ผกผันทั้งหมดเลยไหม ? คำตอบก็คือไม่ใช่ สังเกตจากสูตรข้างต้นนี้จะเห็นว่าการหาเมทริกซ์ผกผันของ A จะต้องถูกหารด้วย $\det(A)$ นั่นหมายความว่าถ้า $\det(A) = 0$ เมทริกซ์ A นั้นก็จะไม่มีเมทริกซ์ผกผัน ดังนั้นเวลาเราหาเมทริกซ์ผกผัน สามารถทดหา $\det(A)$ เอาไว้ก่อนได้ เพราะถ้า $\det(A) = 0$ เราจะได้ไม่ต้องทำต่อ แล้วตอบไปได้เลยว่าเมทริกซ์นี้ไม่มีเมทริกซ์ผกผัน

ตัวอย่างที่ 10 จงหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ต่อไปนี้ (ถ้ามี)

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

วิธีทำ จะได้ $\det(A) = (1)(-1) - (0)(2) = -1$

ดังนั้น $$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2. $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$

วิธีทำ จะได้ $\det(B) = (2)(3) - (-1)(-6) = 6 - 6 = 0$

ดังนั้นเมทริกซ์นี้ไม่มีเมทริกซ์ผกผัน

ระบบสมการเชิงเส้น

ในระดับชั้น ม.ต้น น้อง ๆ เคยแก้ระบบสมการเพื่อหาคำตอบมาแล้วซึ่งทำได้หลายวิธี การใช้เมทริกซ์ก็เป็นอีกวิธีหนึ่งที่จะช่วยให้เราหาคำตอบของระบบสมการได้ ไม่ว่าระบบสมการที่ง่าย ๆ หรือซับซ้อน เราก็สามารถนำความรู้เรื่องเมทริกซ์มาช่วยหาคำตอบได้นะ

เราสามารถนำวิธีการใช้เมทริกซ์เพื่อหาคำตอบของระบบสมการที่มีกี่สมการ กี่ตัวแปรก็ได้ แต่ในบทนี้จะเน้นเฉพาะระบบสมการเชิงเส้นที่มี 2 สมการ 2 ตัวแปร และระบบสมการเชิงเส้นที่มี 3 สมการ 3 ตัวแปรเท่านั้น

พี่จะพาน้อง ๆ มาพิจารณาการแก้สมการเมทริกซ์ 2 วิธีดังต่อไปนี้เลย

วิธีที่ 1 ใช้ตัวผกผันของเมทริกซ์ (วิธีย้ายข้าง)

ขั้นตอนที่ 1 เขียนระบบสมการให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ $AX = B$

เช่น จากระบบสมการ $x + y = -1$

$$2x - y = 4$$

จะได้ ระบบสมการในรูปเมทริกซ์ $AX = B$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ขั้นตอนที่ 2 หาเมทริกซ์ผกผัน ย้ายข้าง แก้สมการ

ระวัง ! ถ้าคูณเมทริกซ์เข้าไปที่ฝั่งซ้าย อีกข้างหนึ่งของสมการ ต้องคูณฝั่งซ้ายเช่นเดียวกัน ไม่สามารถคูณเข้าไปฝั่งขวาได้ เพราะเมทริกซ์ไม่มีสมบัติสลับที่การคูณ !

$$\begin{aligned} AX &= B \\ A^{-1}AX &= A^{-1}B \\ IX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 11 จงหาคำตอบของระบบสมการ $x + y = -1$

$$2x - y = 4$$

วิธีทำ ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

เขียนระบบสมการให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ $AX = B$ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

หาเมทริกซ์ผกผันของ A จะได้

$$A^{-1} = \frac{1}{1(-1) - 2(1)}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $X = A^{-1}B$

ดังนั้น $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} - \frac{4}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

นั่นคือ $x = 1$ และ $y = -2$

ดังนั้น $(1, -2)$ เป็นคำตอบของระบบสมการ

วิธีที่ 2 ใช้เมทริกซ์แต่งเติม

ขั้นตอนที่ 1 เขียนระบบสมการให้อยู่ในรูปเมทริกซ์แต่งเติม

จาก $AX = B$ เขียนให้อยู่ในรูป $[A|B]$

ขั้นตอนที่ 2 ดำเนินการตามแถวโดยแปลงด้านซ้ายให้เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ซึ่งการดำเนินการตามแถวทำได้ 3 แบบ ดังนี้

- $R_i \leftrightarrow R_j$

  สลับแถวที่ i กับแถวที่ j ของเมทริกซ์

- cR_i

  คูณสมาชิกในแถวที่ i ด้วยค่าคงตัว c ซึ่ง $c \neq 0$

- $cR_i + R_j$

  คูณสมาชิกในแถวที่ i ด้วยค่าคงตัว c ซึ่ง $c \neq 0$ แล้วนำไปบวกกับสมาชิกในแถวที่ j เมื่อ $i \neq j$ (แทนผลลัพธ์นี้ในแถว j)

ตัวอย่างที่ 12 จงหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้

$y-3z=-5$

$x+2z=4$

$2z=6$

วิธีทำ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right] R_2 \leftrightarrow R_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \frac{1}{2}R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] 3R_3 + R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] -2R_3 + R_1$$

ดังนั้น $x=-2, y=4$ และ $z=3$