ตรรกศาสตร์ ม.4

ตรรกศาสตร์ คืออะไร ?

การศึกษาตรรกศาสตร์เป็นรากฐานความรู้และเป็นเครื่องมือที่สำคัญในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ซึ่งในบทนี้น้อง ๆ จะได้เรียนรู้เกี่ยวกับสัญลักษณ์และภาษาทางตรรกศาสตร์ เพื่อใช้ในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และเรียนคณิตศาสตร์ในบทถัด ๆ ไป

ประพจน์

ประพจน์ (statement) คือ ประโยคหรือข้อความที่เป็น **"จริง"** หรือ **"เท็จ"** อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น เรียก จริง (True: T) หรือ เท็จ (False: F) ว่า ค่าความจริง (truth value) ของประพจน์

ตัวอย่างที่ 1 ประโยคหรือข้อความต่อไปนี้เป็นประพจน์หรือไม่ ถ้าเป็นประพจน์จงบอกค่าความจริงของประพจน์

1. พระอาทิตย์ขึ้นทางทิศตะวันออก

   ตอบ เป็นประพจน์ มีค่าความจริงเป็นจริง (T)

2. $3 + 2 = 6$

   ตอบ เป็นประพจน์ มีค่าความจริงเป็นเท็จ (F)

3. x เป็นจำนวนนับ

   ตอบ ไม่เป็นประพจน์

ข้อสังเกต

ประพจน์จะเป็นประโยคที่อยู่ในรูปบอกเล่าหรือปฏิเสธก็ได้และจะต้องมีค่าความจริงเดียวเท่านั้น

การเชื่อมประพจน์

ในชีวิตประจำวันน้อง ๆ จะพบประโยคที่ได้จากการเชื่อมกันมากกว่าหนึ่งประโยค โดยในบทนี้ตัวเชื่อมที่น้อง ๆ จะเจอ ได้แก่ "และ" "หรือ" "ถ้า...แล้ว..." "ก็ต่อเมื่อ" หรือพบประโยคซึ่งเปลี่ยนแปลงมาจากประโยคเดิม โดยเติมคำว่า "ไม่" เข้าไป ซึ่งคำทั้งหมดนี้เราจะเรียกว่า **ตัวเชื่อม (connective)** ทั้งหมด

ประโยคที่มีตัวเชื่อมจะมีตัวอย่างดังนี้

- 2 เป็นจำนวนคู่ และ 1 เป็นจำนวนคี่
- ถ้า 3 เป็นจำนวนตรรกยะ แล้ว π เป็นจำนวนอตรรกยะ
- รูปสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกัน ก็ต่อเมื่อ รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นมีขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ ๆ ทั้งสามคู่

ถ้า p และ q เป็นประพจน์ใด ๆ แล้วการเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม “และ” “หรือ” “ถ้า…แล้ว…” “ก็ต่อเมื่อ” “ไม่”

จะมีการใช้สัญลักษณ์

- p และ q เขียนแทนด้วย $p \wedge q$
- p หรือ q เขียนแทนด้วย $p \vee q$
- ถ้า p แล้ว q เขียนแทนด้วย $p \rightarrow q$
- นิเสธของ p เขียนแทนด้วย $\sim p$

และจะมีค่าความจริง ดังนี้

ตารางค่าความจริง

ประพจน์ย่อย		และ	หรือ	ถ้า...แล้ว...	ก็ต่อเมื่อ
p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

p	นิเสธ $\sim p$
T	F
F	T

การหาค่าความจริงของประพจน์

จากตารางค่าความจริงในหัวข้อก่อนหน้านี้ ที่มีตัวเชื่อมแบบต่าง ๆ ที่เราเคยกล่าวมาแล้ว เมื่อโจทย์กำหนดค่าความจริงของประพจน์หนึ่งมา น้อง ๆ จะใช้ความรู้นี้เพื่อหาค่าความจริงของประพจน์ย่อยได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็น จริง และ เท็จ ตามลำดับ จงหาค่าความจริงของ $(\sim p \vee q) \rightarrow p$

วิธีทำ $(\sim p \vee q) \rightarrow p$

$= (\sim T \vee F) \rightarrow T$

$= (F \vee F) \rightarrow T$

$= F \rightarrow T$

$= T$

การสร้างตารางค่าความจริง

เมื่อโจทย์ไม่ได้กำหนดค่าความจริงของประพจน์ย่อยมาให้ แต่เราต้องการหาความจริงของประพจน์ใหญ่ ๆ ที่มีตัวเชื่อมอยู่ในนั้นด้วยแล้ว เราสามารถใช้ตารางค่าความจริง เพื่อวิเคราะห์ค่าความจริงของประพจน์ว่าเป็นจริงหรือเท็จในแต่ละกรณีได้ โดยเราจะมองว่า p และ q เป็นประพจน์ใด ๆ ซึ่งเราจะต้องสมมติค่าความจริงของ p และ q ทุกกรณี

โดย ถ้ารูปแบบของประพจน์มีจำนวนประพจน์ย่อยอยู่ n ประพจน์
แล้วจะมีกรณีเกี่ยวกับค่าความจริงที่ต้องพิจารณาทั้งหมด 2^n กรณี

จะได้ ถ้ามี 1 ประพจน์ เช่น p แล้วจะมีกรณีในตารางค่าความจริงทั้งหมด $2^1 = 2$ กรณี
ถ้ามี 2 ประพจน์ เช่น p และ q แล้วจะมีกรณีในตารางค่าความจริงทั้งหมด $2^2 = 4$ กรณี
ถ้ามี 3 ประพจน์ เช่น p, q และ r แล้วจะมีกรณีในตารางค่าความจริงทั้งหมด $2^3 = 8$ กรณี

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ จงสร้างตารางค่าความจริงของ $p \rightarrow (q \vee \sim p)$

วิธีทำ (สร้างตารางค่าความจริง)

p	q	$\sim p$	$q \vee \sim p$	$p \rightarrow (q \vee \sim p)$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

โจทย์บางข้อที่มีความซับซ้อนมากขึ้น โจทย์อาจไม่กำหนดค่าความจริงของประพจน์ย่อยมาให้ทุกตัว แต่เราจะต้องหาค่าความจริงของประพจน์ที่ใหญ่ขึ้นก่อนนั้น เช่น โจทย์ต้องการให้หาค่าความจริงของ $p \wedge q$
โจทย์บางข้อที่มีความซับซ้อนมากขึ้น โจทย์อาจไม่กำหนดค่าความจริงของประพจน์ย่อยมาให้ทุกตัว

แต่เราทราบค่าความจริงของประพจน์ย่อย p เพียงตัวเดียว และไม่ทราบค่าความจริงของประพจน์ย่อย Q เลย มีวิธีการทำได้โดยให้น้อง ๆ ลองพิจารณาค่าความจริงของประพจน์ด้านล่างนี้ แต่ไม่ต้องท่องจำนะ ให้ลองทำความเข้าใจ โดยนำความรู้เรื่องตารางค่าความจริงก่อนหน้านี้มาใช้ด้วย ดังนี้

ข้อควรรู้

เจอปุ๊บตอบปั๊บ	ค่าความจริงขึ้นอยู่กับ...
$p \wedge F \equiv F$	$p \wedge T \equiv p$
$p \vee T \equiv T$	$p \vee F \equiv p$
$p \wedge \sim p \equiv F$	$p \leftrightarrow T \equiv p$
$p \vee \sim p \equiv T$	$p \leftrightarrow F \equiv \sim p$
$p \leftrightarrow p \equiv T$	$p \wedge p \equiv p$
	$p \vee p \equiv p$

รูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน

ถ้าน้อง ๆ สร้างตารางค่าความจริงแล้วพบว่ามีประพจน์สองรูปแบบที่มีค่าความจริงตรงกันทุกกรณี เราจะสามารถนำสองประพจน์นั้นไปใช้แทนกันได้เลย เพราะมันเหมือนกันเลย โดยเรียกรูปแบบของประพจน์ทั้งสองว่าเป็น**รูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน**

เช่น $p \vee q$ กับ $q \vee p$ สองประพจน์นี้สมมูลกัน เพราะเมื่อสร้างตารางค่าความจริงแล้วจะมีค่าความจริงเหมือนกันแบบกรณีต่อกรณี ดังนั้นเราจะหยิบเอา $p \vee q$ หรือ $q \vee p$ ตัวไหนไปใช้ก็ได้ มันสามารถใช้แทนกันได้เลย

โดยน้อง ๆ สามารถตรวจสอบว่าประพจน์ทั้งสองสมมูลกันหรือไม่ ทำได้ 2 วิธี คือ

1. สร้างตารางค่าความจริง
2. ใช้รูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน

วิธีที่ 1 สร้างตารางค่าความจริง

ประพจน์ที่สมมูลกันจะมีค่าความจริงเหมือนกันกรณีต่อกรณี

เช่น พิจารณาตารางค่าความจริงของ $p \rightarrow q$ และ $\sim p \vee q$

พิจารณาตารางค่าความจริงของ $p \rightarrow q$ **และ** $\sim p \vee q$

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

น้อง ๆ จะเห็นว่า จากตารางค่าความจริง ในช่องสุดท้ายค่าความจริงของ $p \rightarrow q$ และ $\sim p \vee q$ ตรงกันทุกกรณี แบบกรณีต่อกรณี

เราจึงสรุปได้ว่า $p \rightarrow q$ และ $\sim p \vee q$ เป็นรูปแบบประพจน์ที่สมมูลกัน

วิธีที่ 2 ใช้รูปแบบประพจน์ที่สมมูลกัน

หากประพจน์ก้อนหนึ่งใหญ่มาก ๆ การสร้างตารางก็จะต้องใช้เวลามากตามไปด้วย และต้องใช้ความรอบคอบอย่างมากในการใส่ค่าความจริงลงไปในแต่ละช่องของตาราง เพราะถ้าใส่ค่าความจริงผิดแม้แต่ช่องเดียว ก็อาจทำให้คำตอบของเราออกมาผิดได้เลยทันที

ดังนั้นพี่จึงแนะนำให้น้อง ๆ ใช้รูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกันด้านล่างนี้ไปใช้ในการจัดรูปเพื่อดูว่าเราสามารถจัดรูปให้ประพจน์สองก้อนนั้นมีหน้าตาเหมือนกันได้หรือไม่ ซึ่งถ้าสามารถจัดรูปให้เหมือนกันได้ แสดงว่าประพจน์สองประพจน์นั้นสมมูลกัน

รูปแบบประพจน์ที่สมมูลกัน

1. $\sim(\sim p) \equiv p$

สลับที่ได้

2. $p \wedge q \equiv q \wedge p$
3. $p \vee q \equiv q \vee p$
4. $p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$

กระจายได้

5. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
6. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

สูตร ถ้า...แล้ว...

7. $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

สูตร ก็ต่อเมื่อ

8. $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

กระจายนิเสธ

9. $\sim(p \leftrightarrow q) \equiv \sim p \leftrightarrow q \equiv p \leftrightarrow \sim q$
10. $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
11. $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

SmartMathPro

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์

จงพิจารณาว่าประพจน์ $\sim(p \rightarrow q) \vee \sim(\sim p \rightarrow r)$ และ $p \wedge (\sim q \vee \sim r)$ สมมูลกันหรือไม่

วิธีทำ $\sim(p \rightarrow q) \vee \sim(\sim p \rightarrow r)$

$$\equiv \sim(\sim p \vee q) \vee \sim(p \vee r)$$

$$\equiv (p \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim r)$$

$$\equiv p \wedge (\sim q \vee \sim r)$$

ดังนั้น $\sim(p \rightarrow q) \vee \sim(p \rightarrow r) \equiv p \wedge (\sim q \vee \sim r)$

น้อง ๆ จะเห็นว่าถ้าเราสามารถจัดรูปสองประพจน์ให้มีหน้าตาเหมือนกันได้ โดยใช้รูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน นั่นคือประพจน์สองประพจน์นั้นสมมูลกัน

สัจนิรันดร์

สัจนิรันดร์ คือ รูปแบบของประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็น**จริงทุกกรณี**

เรานิยมตรวจสอบว่ารูปแบบประพจน์นั้นเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ด้วย 2 วิธีต่อไปนี้

1. สร้างตารางค่าความจริง
2. หาข้อขัดแย้ง

วิธีที่ 1 สร้างตารางค่าความจริง

เราจะใช้วิธีการสร้างตารางค่าความจริงเหมือนที่น้อง ๆ เคยทำมาในหัวหน้าก่อนหน้านี้เลยนะ เพื่อพิจารณาว่าค่าความจริงที่ได้ในช่องขวาสุดเป็นจริงทั้งหมดหรือไม่ ถ้าเป็นจริงทั้งหมดเลยไม่ว่าประพจน์ย่อย p,q จะมีค่าความจริงเป็นอะไร ก็จะได้ว่าประพจน์นั้นเป็นสัจนิรันดร์

ตัวอย่างที่ 5 จงตรวจสอบว่ารูปแบบของประพจน์ $(p \vee q) \rightarrow (q \wedge p)$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

วิธีทำ (ตรวจสอบสัจนิรันดร์)

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$	$(p \vee q) \longrightarrow (q \vee p)$
T	T	T	T	T
T	F	T	T	T
F	T	T	T	T
F	F	F	F	T

ดังนั้น $(p \vee q) \rightarrow (q \wedge p)$ เป็นสัจนิรันดร์

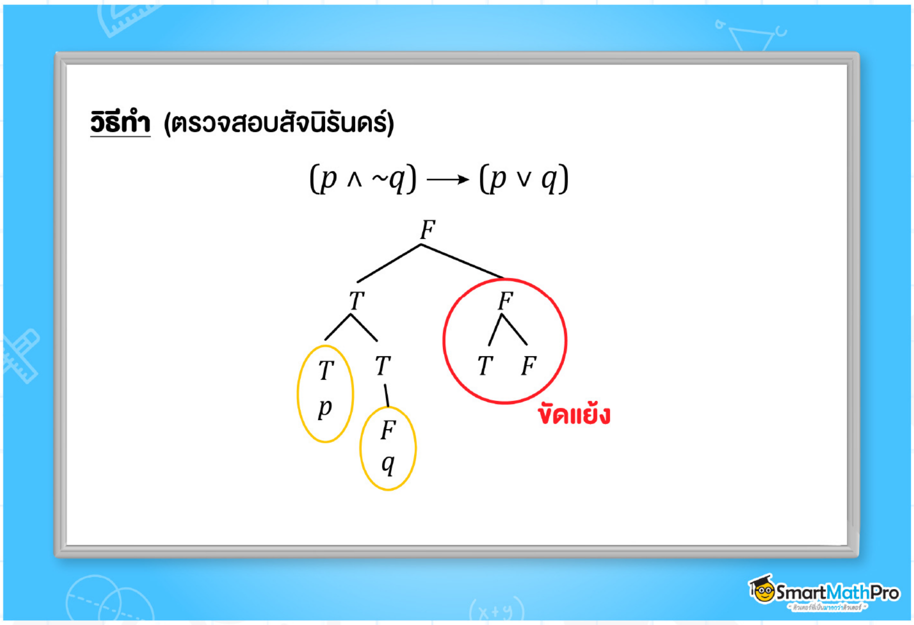
เช่นเดียวกับการสร้างตารางค่าความจริงในหัวข้ออื่น ๆ มันมีข้อจำกัดที่ว่าเราอาจต้องใช้เวลามาก และต้องใช้ความรอบคอบ พี่ก็จะแนะนำให้น้อง ๆ ลองฝึกใช้การหาข้อขัดแย้งซึ่งเป็นวิธีถัดไป

วิธีที่ 2 หาข้อขัดแย้ง

วิธีการหาข้อขัดแย้ง เป็นวิธีการที่สมมติให้รูปแบบของประพจน์ที่ต้องการหามีค่าความจริงเป็นเท็จ ถ้าไม่เกิดข้อขัดแย้ง จะสรุปว่ารูปแบบของประพจน์ไม่เป็นสัจนิรันดร์ เพราะสามารถเป็นเท็จตามที่เรากำหนดตอนแรก แต่หากพบข้อขัดแย้งระหว่างที่พยายามทำให้ประพจน์มีค่าเป็นเท็จ แสดงว่ารูปแบบของประพจน์นั้นไม่สามารถเป็นเท็จได้ แปลว่าต้องเป็นจริงเสมอ จึงสรุปได้ว่ารูปแบบของประพจน์เป็นสัจนิรันดร์

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ จงตรวจสอบว่ารูปแบบของประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

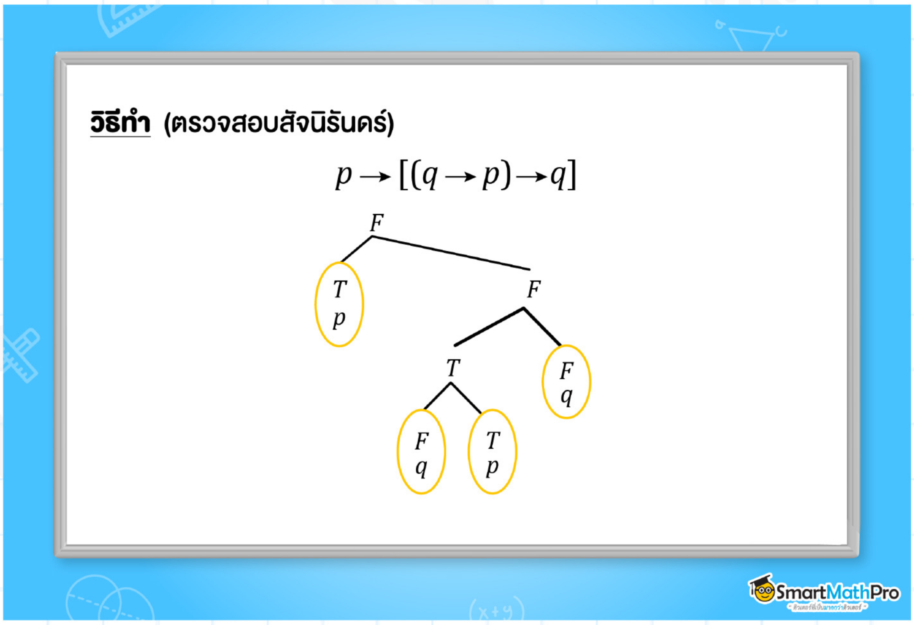
1) $(p \wedge \sim q) \rightarrow (p \vee q)$



เนื่องจากเกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $(p \wedge \sim q) \rightarrow (p \vee q)$ เป็นสัจนิรันดร์

2) $p \rightarrow [(q \rightarrow p) \rightarrow q]$



เนื่องจากไม่เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $p \rightarrow [(q \rightarrow p) \rightarrow q]$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์

มีข้อขัดแย้ง คือ เป็นสัจนิรันดร์

ไม่มีข้อขัดแย้ง คือ ไม่เป็นสัจนิรันดร์

การอ้างเหตุผล

ประกอบด้วย เหตุ $(p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n)$ และ ผล C

การอ้างเหตุผล จะเชื่อมเหตุแต่ละตัวด้วย "และ" และเชื่อมจากเหตุไปผลด้วย "ถ้า...แล้ว..."

ได้เป็นรูปแบบของประพจน์ในรูป $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n) \rightarrow C$

การอ้างเหตุผลนี้**สมเหตุสมผล (Valid)** ก็ต่อเมื่อ รูปแบบของประพจน์เป็น**สัจนิรันดร์**

และ**ไม่สมเหตุสมผล (Invalid)** ก็ต่อเมื่อ รูปแบบของประพจน์**ไม่เป็นสัจนิรันดร์**

กล่าวคือ ในหัวข้อนี้เราจะตรวจสอบแบบเดียวกับที่ตรวจสอบสัจนิรันดร์เลย เพียงแค่เพิ่มขั้นตอนที่ 1 ตามตัวอย่างด้านล่างนี้มาเท่านั้น

ตัวอย่างที่ 7 กำหนดให้ p และ q เป็นประพจน์ จงตรวจสอบว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1. p

2. $p \rightarrow q$

3. $(q \vee r) \rightarrow s$

ผล s

วิธีทำ

ขั้นที่ 1

ใช้เครื่องหมาย $\wedge$

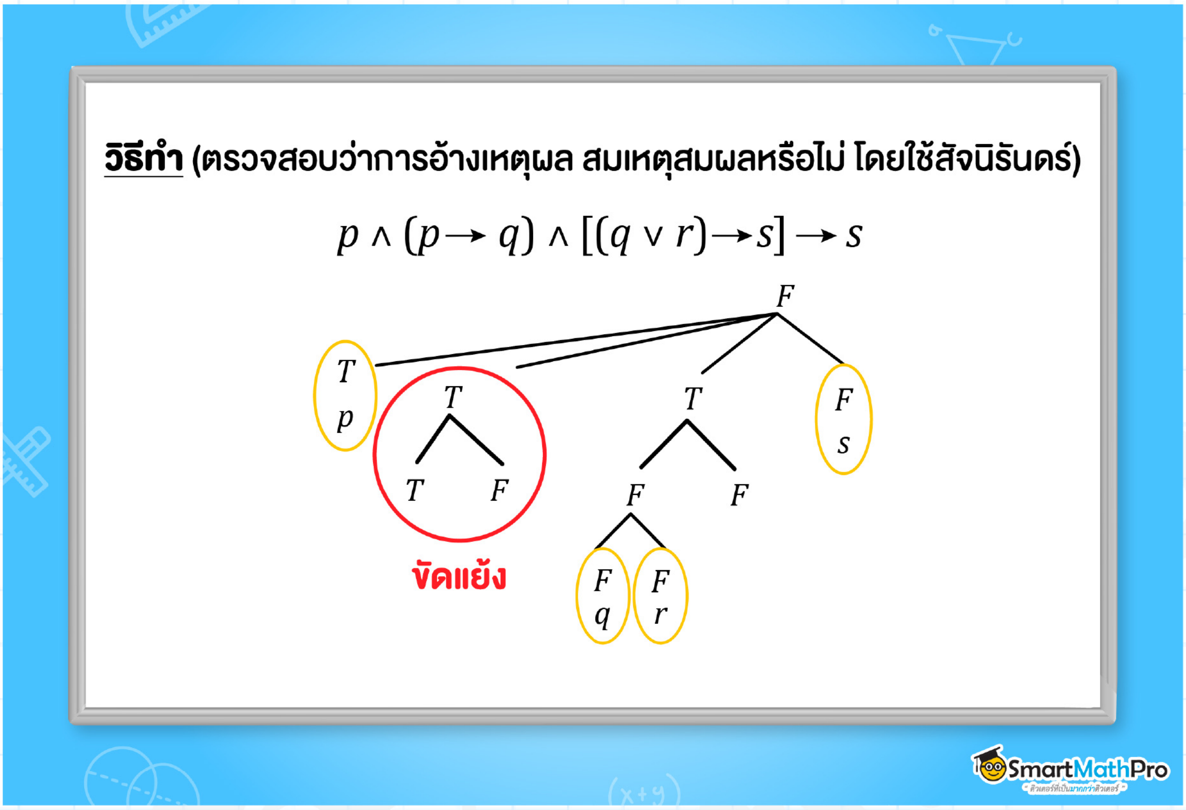
เชื่อมเหตุเข้าด้วยกัน และใช้ $\rightarrow$ เชื่อมส่วนที่เป็นเหตุและผล

จะได้รูปแบบของประพจน์ คือ $p \wedge (p \rightarrow q) \wedge [(q \vee r) \rightarrow s] \rightarrow s$

ขั้นที่ 2

ตรวจสอบรูปแบบของประพจน์ที่ได้ว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

โดย สมมติให้ $p \wedge (p \rightarrow q) \wedge [(q \vee r) \rightarrow s] \rightarrow s$ เป็นเท็จ



จากแผนภาพเกิดข้อขัดแย้ง แสดงว่า รูปแบบของประพจน์

$p \wedge (p \rightarrow q) \wedge [(q \vee r) \rightarrow s] \rightarrow s$ เป็นสัจนิรันดร์

ดังนั้น การอ้างเหตุผลนี้สมเหตุสมผล

มีข้อขัดแย้ง คือ เป็นสัจนิรันดร์ แสดงว่าการอ้างเหตุผลนั้น สมเหตุสมผล

ไม่มีข้อขัดแย้ง คือ ไม่เป็นสัจนิรันดร์ แสดงว่าการอ้างเหตุผลนั้น ไม่สมเหตุสมผล

ประโยคเปิดและตัวบ่งปริมาณ

ให้น้อง ๆ ลองพิจารณาประโยค "เขาเป็นนักร้อง" ประโยคนี้เราจะยังไม่ทราบว่ามีค่าความจริงเป็นอะไร จนกว่าเราจะแทนชื่อใครสักคนลงไปในคำว่าเขา เช่น แทนชื่อพี่ปั้นลงไปจะได้ว่า "พี่ปั้นเป็นนักร้อง" เราถึงจะได้ว่าประโยคนี้เป็นเท็จ เพราะถึงพี่ปั้นจะร้องเพลงเพราะ แต่พี่ปั้นไม่ได้เป็นนักร้อง พี่ปั้นสอนคณิตศาสตร์

น้อง ๆ พอจะเข้าใจความหมายของประโยคเปิดกันแล้วใช่ไหม เราไปดูความหมายแบบทางการขึ้นอีกนิดกันดีกว่า

ประโยคเปิด

คือ ประโยคบอกเล่าหรือปฏิเสธที่มีตัวแปร ซึ่งจะไม่ทราบค่าความจริงจนกว่าจะแทนค่าลงในตัวแปร เช่น ประโยคเปิด : $x < 1$

- แทน "x" ด้วย "0" จะได้ "$0 < 1$" ซึ่งเป็นจริง
  นั่นคือเป็นการแทนค่าตัวแปรที่ได้ค่าความจริง<u>เป็นจริง</u>
- แทน "x" ด้วย "2" จะได้ "$2 < 1$" ซึ่งเป็นเท็จ
  นั่นคือเป็นการแทนค่าตัวแปรที่ได้ค่าความจริง<u>เป็นเท็จ</u>

หมายเหตุ โดยส่วนมากจะเขียนแทนประโยคเปิดด้วย $P(x), Q(x)$

ตัวบ่งปริมาณ

ในทางตรรกศาสตร์ มี 2 ตัว คือ ∀ (for all) และ ∃ (for some)

- $\forall x$ แทน สำหรับ x ทุกตัว
- $\exists x$ แทน สำหรับ x บางตัว

เอกภพสัมพัทธ์ ในที่นี้หมายถึงเซตที่บอกขอบเขตของสิ่งที่จะพิจารณาประโยคเปิด U เขียนแทนด้วย ซึ่งจะระบุสมาชิกเซต หรือเป็นสัญลักษณ์ดังนี้

- $\mathbb{R}$ แทน เซตของจำนวนจริง
- $\mathbb{Q}$ แทน เซตของจำนวนตรรกยะ
- $\mathbb{Z}$ แทน เซตของจำนวนเต็ม
- $\mathbb{N}$ แทน เซตของจำนวนนับ

ประโยคเปิดที่มีตัวบ่งปริมาณ

คือ ข้อความที่ประกอบด้วยตัวบ่งปริมาณและประโยคเปิด ซึ่งจะกำหนดเอกภพสัมพัทธ์เอาไว้ด้วย ข้อความต่อไปนี้อาจเขียนให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ได้

- สำหรับ x ทุกตัว $x + 0 = x$ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนนับ
  $\forall x[x + 0 = x]$ เมื่อ $U = N$
  หรือ $\forall x \in \mathbb{N}\,[x + 0 = x]$
- สำหรับ x ทุกตัว $x = -1$ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง
  $\exists x[x = -1]$ เมื่อ $U = R$
  หรือ $\exists x \in \mathbb{R}\,[x = -1]$

ข้อความข้างต้น น้อง ๆ จะเห็นว่า ถ้าเราเติมตัวบ่งปริมาณข้างหน้าประโยคเปิดจะได้เป็นประโยคเปิดที่มีตัวบ่งปริมาณ ซึ่งข้อความเหล่านี้เราสามารถหาค่าความจริงของมันได้ด้วย พี่จะลองใช้ประโยคในตัวอย่างก่อนหน้านี้มาลองหาค่าความจริงของมันกัน

- จาก $\forall x \in \mathbb{N}[x + 0 = x]$
  มีค่าความจริงเป็นจริง เนื่องจากเมื่อนำจำนวนจริงทุกจำนวน บวกศูนย์ แล้วจะได้ตัวมันเองเสมอ
- จาก $\exists x \in \mathbb{R}[x = -1]$
  มีค่าความจริงเป็นจริง เนื่องจากเมื่อแทน x ด้วย -1 (ซึ่ง -1 เป็นจำนวนจริง)
  จะได้ว่า $-1 = -1$ ทำให้ได้สมการเป็นจริง

จากตัวอย่างข้างต้น จะเห็นว่า ถ้าเติมตัวบ่งปริมาณข้างหน้าประโยคเปิดแล้วจะได้ประพจน์ เนื่องจากเราสามารถหาค่าความจริงได้ โดยประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณเหล่านี้จะมีค่าความจริงเป็นจริงหรือเท็จเพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

ค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ

การพิจารณาค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณนั้น โดยทั่วไปจะพิจารณาแต่ละส่วนของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณดังนี้

ส่วนที่ 1 ตัวบ่งปริมาณ
ส่วนที่ 2 ประโยคเปิด
ส่วนที่ 3 เอกภพสัมพัทธ์

กำหนดให้ $P(x)$ เป็นประโยคเปิด และ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ จะได้ว่า

$\forall x[P(x)]$

- มีค่าความจริงเป็น**จริง** ก็ต่อเมื่อ
  แทนตัวแปร x ใน $P(x)$ ด้วยสมาชิกแต่ละตัวในเอกภพสัมพัทธ์ แล้วได้ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็น**จริงทั้งหมด**
- มีค่าความจริงเป็น**เท็จ** ก็ต่อเมื่อ
  แทนตัวแปร x ใน $P(x)$ ด้วยสมาชิก**อย่างน้อยหนึ่งตัว**ในเอกภพสัมพัทธ์ แล้วได้ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ

$\exists x[P(x)]$

- มีค่าความจริงเป็น**จริง** ก็ต่อเมื่อ
  แทนตัวแปร x ใน $P(x)$ ด้วยสมาชิก**อย่างน้อยหนึ่งตัว**ในเอกภพสัมพัทธ์ แล้วได้ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง
- มีค่าความจริงเป็น**เท็จ** ก็ต่อเมื่อ
  แทนตัวแปร x ใน $P(x)$ ด้วยสมาชิกแต่ละตัวในเอกภพสัมพัทธ์ แล้วได้ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็น**เท็จทั้งหมด**

ตัวอย่างที่ 8 กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ $U=\{-1,0,1\}$ จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

1. $\forall x[x\geq -2]$

วิธีทำ ให้ $P(x)$ แทนประโยคเปิด $x\geq -2$ เนื่องจาก

$P(-1)$ แทน $-1\geq -2$ เป็นจริง

$P(0)$ แทน $0\geq -2$ เป็นจริง

$P(1)$ แทน $1\geq -2$ เป็นจริง

ดังนั้น $\forall x[x\geq -2]$ เป็นจริง เมื่อ $U=\{-1,0,1\}$

2. $\forall x[x\in \mathbb{N}]$

วิธีทำ ให้ $P(x)$ แทนประโยคเปิด $x\in \mathbb{N}$ เนื่องจาก $P(-1)$ แทน $-1\in \mathbb{N}$ เป็นเท็จ

ดังนั้น $\forall x[x\in \mathbb{N}]$ เป็นเท็จ เมื่อ $U=\{-1,0,1\}$

3. $\exists x[x>0]$

วิธีทำ ให้ $P(x)$ แทนประโยคเปิด $x>0$ เนื่องจาก $P(1)$ แทน $1>0$ เป็นจริง

ดังนั้น $\exists x[x>0]$ เป็นจริง เมื่อ $U=\{-1,0,1\}$

4. $\exists x[x<-2]$

วิธีทำ ให้ $P(x)$ แทนประโยคเปิด $x<-2$ เนื่องจาก

$P(-1)$ แทน $-1<-2$ เป็นเท็จ

$P(0)$ แทน $0<-2$ เป็นเท็จ

$P(1)$ แทน $1<-2$ เป็นเท็จ

ดังนั้น $\exists x[x<-2]$ เป็นเท็จ เมื่อ $U=\{-1,0,1\}$

ข้อสังเกต

ถ้าเราอยากตรวจสอบว่า $\forall x[P(x)]$ เป็นจริงหรือเท็จ ให้น้อง ๆ พยายามหา x หนึ่งตัวที่นำไปแทนใน $P(x)$ แล้วจะทำให้เป็นเท็จจะง่ายกว่า เพราะถ้ามี x เพียงตัวเดียวที่ทำให้เป็นเท็จ $\forall x[P(x)]$ จะเป็นเท็จเลยทันที

และถ้าเราอยากตรวจสอบว่า $\exists x[P(x)]$ เป็นจริงหรือเท็จ ให้น้อง ๆ พยายามหา x หนึ่งตัวที่นำไปแทนใน $P(x)$ แล้วจะทำให้เป็นจริงจะง่ายกว่า เพราะถ้ามี x เพียงตัวเดียวที่ทำให้เป็นจริง $\exists x[P(x)]$ จะเป็นจริงเลยทันที

น้อง ๆ บางคนอาจสับสนว่าแล้วถ้าตัวบ่งปริมาณนั้นมีตัวเชื่อมอยู่ด้านนอก หรือมีตัวเชื่อมอยู่ด้านในประโยคเปิด พี่จะบอกว่ามันแตกต่างกัน วิธีการหาค่าความจริงก็แตกต่างกัน ตามตัวอย่างด้านล่างนี้เลย

ตัวอย่างที่ 9 กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ $U = \{-1, 0, 1\}$ จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

1. $\exists x[x = 0] \wedge \exists x[x < -1]$

แนวคิด ให้น้อง ๆ พิจารณาค่าความจริงของ $\exists x[x = 0]$ และ $\exists x[x < -1]$ แยกกัน แล้วนำค่าความจริงที่ได้มาเชื่อมกันด้วยตัวเชื่อม $\wedge$

วิธีทำ ให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ แทนประโยคเปิด $x = 0$ และ $x < -1$ ตามลำดับ

- จะได้ว่า $\exists x[x = 0]$ มีค่าความจริงเป็นจริง
  เนื่องจาก $P(0)$ แทน $0 = 0$ ซึ่งเป็นจริง
  นั่นคือ $\exists x[x = 0] \equiv T$

- จะได้ว่า $\exists x[x < -1]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ เนื่องจาก
  $Q(-1)$ แทน $-1 < -1$ ซึ่งเป็นเท็จ
  $Q(0)$ แทน $0 < -1$ ซึ่งเป็นเท็จ และ
  $Q(1)$ แทน $1 < -1$ ซึ่งเป็นเท็จ
  นั่นคือ $\exists x[x < -1] \equiv F$
  จะได้ว่า $\exists x[x = 0] \wedge \exists x[x < -1] \equiv T \wedge F \equiv F$

ดังนั้น $\exists x[x = 0] \wedge \exists x[x < -1]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

2. $\exists x[(x = 0) \wedge (x < -1)]$

แนวคิด ให้น้อง ๆ พิจารณาค่าความจริงโดยแทนค่า x จาก U ลงใน $(x = 0) \wedge (x < -1)$ เป็นก้อนเดียวกันไปเลย

วิธีทำ ให้ $P(x)$ แทนประโยคเปิด $(x = 0) \wedge (x < -1)$ เนื่องจาก

$P(-1)$ แทน $(-1 = 0) \wedge (-1 < -1) \equiv F \wedge F \equiv F$ ซึ่งเป็นเท็จ

$P(0)$ แทน $(0 = 0) \wedge (0 < -1) \equiv T \wedge F \equiv F$ ซึ่งเป็นเท็จ

$P(1)$ แทน $(1 = 0) \wedge (1 < -1) \equiv F \wedge F \equiv F$ ซึ่งเป็นเท็จ

ดังนั้น $\exists x[(x = 0) \wedge (x < -1)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

สมมูลและนิเสธของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ

สมมูล

- $\forall x[P(x)] \equiv \forall x[Q(x)]$ ก็ต่อเมื่อ $P(x) \equiv Q(x)$
- $\exists x[P(x)] \equiv \exists x[Q(x)]$ ก็ต่อเมื่อ $P(x) \equiv Q(x)$

นิเสธ

- $\sim\forall x[P(x)] \equiv \exists x[\sim P(x)]$
- $\sim\exists x[P(x)] \equiv \forall x[\sim P(x)]$

ถ้าน้อง ๆ จะกระจายนิเสธเข้าไป จะต้องกระจายไปที่ตัวบ่งปริมาณ แล้วอย่าลืมกระจายเข้าไปใน $P(x)$ ด้วยน้า

ตัวอย่างที่ 10 จงพิจารณาว่าประโยคในข้อต่อไปนี้สมมูลกันหรือไม่

1. $\forall x[P(x) \vee Q(x)]$ กับ $\forall x[Q(x) \vee P(x)]$

   สมมูลกัน เนื่องจาก $P(x) \vee Q(x) \equiv Q(x) \vee P(x)$

2. $\exists x[P(x) \rightarrow Q(x)]$ กับ $\exists x[Q(x) \rightarrow P(x)]$

   ไม่สมมูลกัน เนื่องจาก $P(x) \rightarrow Q(x) \not\equiv Q(x) \rightarrow P(x)$