

เรขาคณิตวิเคราะห์ และภาคตัดกรวย ม.4

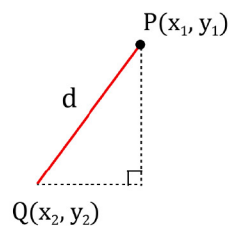
เรขาคณิตวิเคราะห์

ระยะห่างระหว่างจุดสองจุด

ระยะห่างระหว่างจุดสองจุด

ระยะระหว่างจุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) คือ

$$d = PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$



SmartMathPro

กำหนด จุด $P(3, 8)$ กับจุด $Q(6, 4)$ จะได้ว่าระยะห่างระหว่างจุด P และ Q คือ

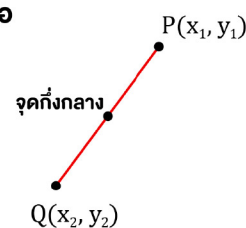
$$d = \sqrt{(3 - 6)^2 + (8 - 4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

จุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง

จุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง

จุดกึ่งกลางระหว่าง (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) คือ

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$



SmartMathPro

กำหนด จุด $P(-1, 6)$ กับจุด $Q(5, 4)$

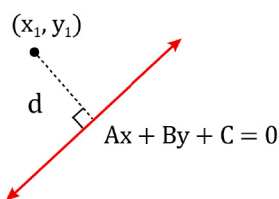
จะได้ว่าจุดกึ่งกลางระหว่าง $(-1, 6)$ และ $(5, 4)$ คือ $(\frac{-1+5}{2}, \frac{6+4}{2}) = (2, 5)$

ระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุด

ระยะห่างเส้นตรงกับจุด

ระยะห่างระหว่างจุด (x_1, y_1)
กับเส้นตรงสมการ $Ax + By + C = 0$ คือ

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



กำหนดจุด $(4, 1)$ กับเส้นตรง $5x - 12y + 18 = 0$

จะได้ว่าระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุด คือ

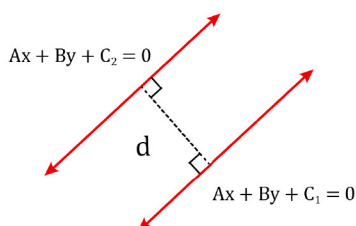
$$d = \frac{|4 \cdot 5 + 1(-12) + 18|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \frac{|20 - 12 + 18|}{\sqrt{169}} = \frac{26}{13} = 2$$

ระยะห่างระหว่างเส้นตรง

ระยะห่างระหว่างเส้นตรง

ระยะห่างระหว่างเส้นตรง $Ax + By + C_1 = 0$
กับ $Ax + By + C_2 = 0$ คือ

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



กำหนด เส้นตรง $6x - 8y + 4 = 0$ กับ $6x - 8y - 16 = 0$

จะได้ว่าระยะห่างระหว่างเส้นตรง คือ

$$d = \frac{|4 - (-16)|}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}} = \frac{|4+16|}{\sqrt{100}} = \frac{20}{10} = 2$$

เส้นตรง

เราสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการเส้นตรง คือ $y = mx + c$

หรือรูปทั่วไปของสมการเส้นตรง คือ $Ax + By + C = 0$ เมื่อ A, B, C

เป็นค่าคงตัวโดยที่ A และ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

ความชันของเส้นตรง (m)

เราสามารถรู้ความชันของเส้นตรง ได้จากสมการ $y = mx + c$ หรือจากสูตรต่อไปนี้

ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) เมื่อ $x_1 \neq x_2$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

เส้นตรงขนานและตั้งฉาก

ให้ m_1 และ m_2 เป็นความชันของเส้นตรง l_1 และ l_2 ตามลำดับ จะได้ว่า

เส้นตรง l_1 และ l_2 ขนานกัน เมื่อ $m_1 = m_2$

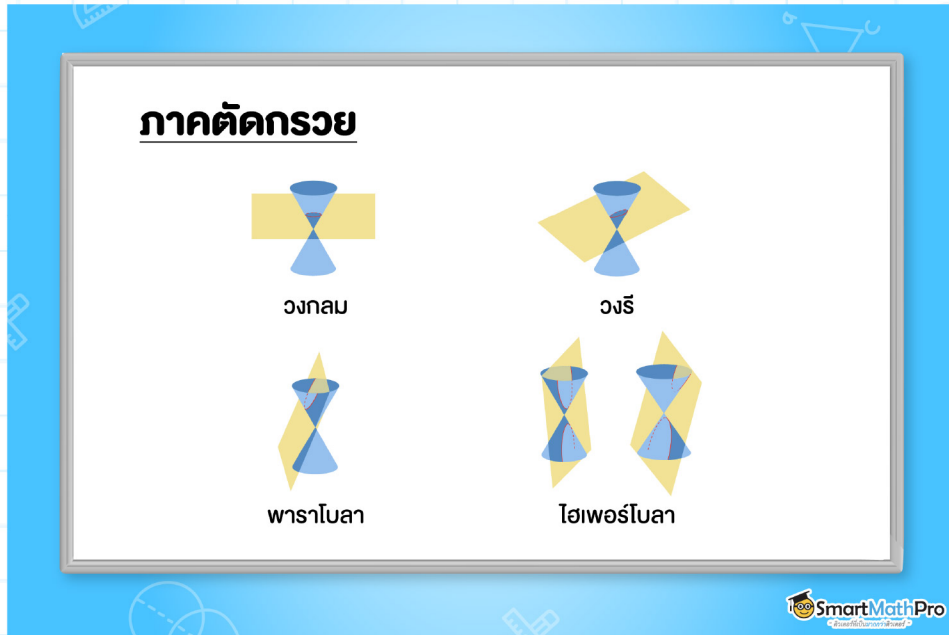
เส้นตรง l_1 และ l_2 ตั้งฉากกัน เมื่อ $m_1 m_2 = -1$

เช่น สมมติเส้นตรง 2 เส้นที่ต่างกัน เส้นตรงที่มีความชัน 2 จะขนานกับเส้นตรงที่มีความชัน 2 เนื่องจากค่าของความชันเท่ากัน จะได้ว่าเส้นตรงขนานกัน และ

เส้นตรงที่มีความชัน 2 จะตั้งฉากกับเส้นตรงที่มีความชัน $-\frac{1}{2}$ เพราะ $2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

ภาคตัดกรวย

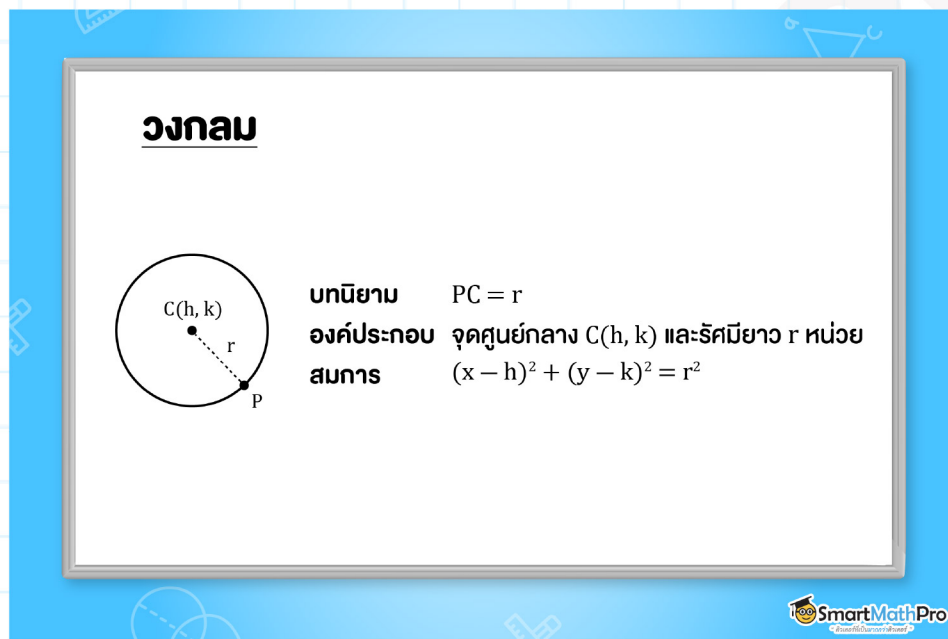
ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาภาคตัดกรวยโดยใช้วิธีทางเรขาคณิตวิเคราะห์มาช่วย โดยนำระนาบมาตัดกรวยกลมตรงในลักษณะที่ต่างกัน ซึ่งจะตัดโดยอิงจากแกนที่อยู่ในแนวตั้งตามรูปด้านล่างและสมการเส้นตรงหรือตัวก่อกำเนิด ดังนั้นภาคตัดกรวยที่น้อง ๆ กำลังจะเรียนก็คือรูปในระนาบที่เกิดจากการตัดกันของระนาบกับกรวย



ถ้าเราตัดโดยใช้ระนาบ (แผ่นสี่เหลี่ยม) ตามรูป จะได้ว่า

- ระนาบตั้งฉากกับแกนของกรวยข้างเดียว จะได้ภาคตัดกรวยที่เรียกว่า วงกลม
- ระนาบไม่ตั้งฉากกับแกนของกรวย แต่ทำมุมกับแกนของกรวยขนาดใหญ่อ้างหนึ่ง ระนาบจะตัดกรวยข้างเดียว ได้ภาคตัดกรวยที่เรียกว่า วงรี
- ระนาบขนานตัวก่อกำเนิดของกรวย ระนาบจะตัดกรวยข้างเดียว ได้ภาคตัดกรวยที่เรียกว่า พาราโบลา
- ระนาบขนานกับแกนของกรวย ระนาบจะตัดกรวยสองข้าง จะได้ภาคตัดกรวยที่เรียกว่า ไฮเพอร์โบลา

วงกลม คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบที่ห่างจากจุด ๆ หนึ่งที่ตรึงอยู่กับที่เป็นระยะทางคงตัว จุดที่ตรึงอยู่กับที่นี้เรียกว่า จุดศูนย์กลาง (center) ของวงกลม และส่วนของเส้นตรงที่มีจุดศูนย์กลางและจุดบนวงกลมเป็นจุดปลายเรียกว่า รัศมี (radius) ของวงกลม



ตัวอย่างที่ 1 จงจัดรูปสมการ $x^2 + y^2 + x + 2y + 1 = 0$
ให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน

วิธีทำ

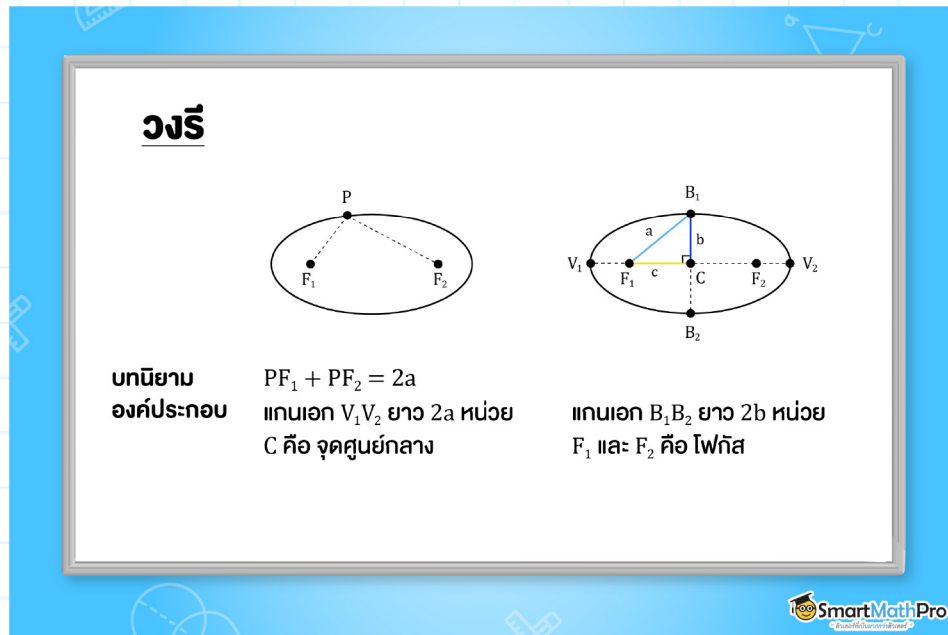
$$x^2 + y^2 + x + 2y + 1 = 0$$

$$(x^2 + x) + (y^2 + 2y) + 1 = 0$$

$$\left(x^2 + x + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + (y^2 + 2y + 1^2) + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1^2 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 1)^2 = \frac{1}{4}$$

วงรี คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ในเซตนั้นไปยังจุดที่ตรึงอยู่กับที่สองจุดมีค่าคงตัว โดยค่าคงตัวนี้ต้องมากกว่าระยะห่างระหว่างจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุด เรียกจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุดนี้ว่า **โฟกัส (focus)** ของวงรี



โดยวงรีที่เราจะศึกษาจะมีสองรูป คือ วงรีที่มีแกนเอกอยู่ในแนวนอน (วงรีแนวนอน) และวงรีที่มีแกนเอกในแนวตั้ง (วงรีแนวตั้ง) ซึ่งรูปแบบมาตรฐานของสมการของวงรี ก็จะมี 2 แบบเช่นกัน

ตัวอย่างที่ 2 จงจัดรูปสมการ $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$

ให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน

วิธีทำ

$$x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$$

$$(x^2 - 6x) + 4(y^2 + 4y) = -21$$

$$(x^2 - 6x + 9) + 4(y^2 + 4y + 4) = -21 + 9 + 16$$

$$(x - 3)^2 + 4(y + 2)^2 = 4$$

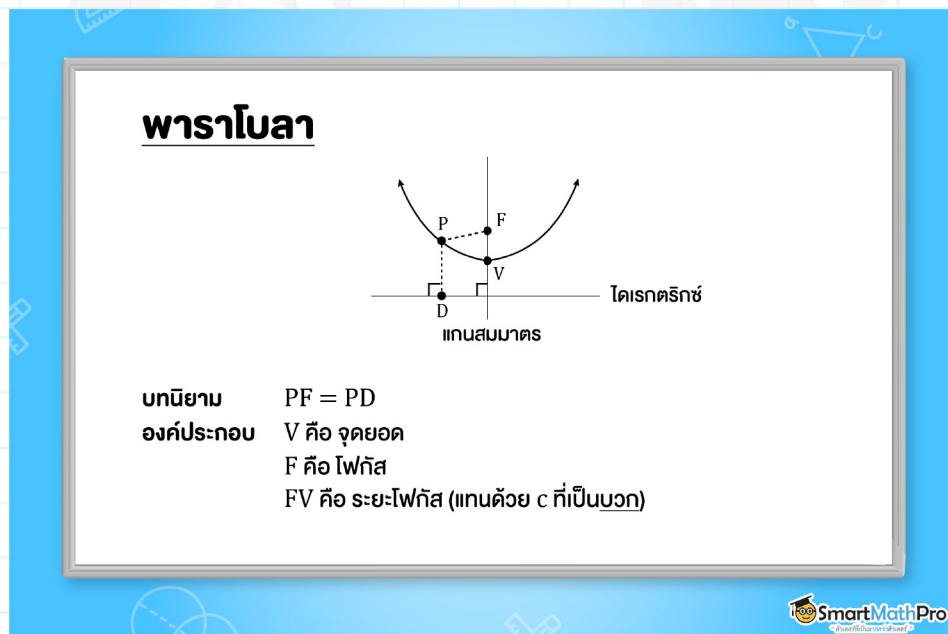
$$\frac{(x - 3)^2}{4} + \frac{(y + 2)^2}{1} = 1$$

$$\frac{(x - 3)^2}{4} + (y + 2)^2 = 1$$

พาราโบลา

น้อง ๆ อาจเคยรู้จักพาราโบลามาแล้วบ้างจากการเรียนเรื่องกราฟของฟังก์ชันกำลังสอง หรือพาราโบลา ในระดับชั้น ม.3 ส่วนบทภาคตัดกรวยนี้ พี่จะพาน้องมารู้จัก พาราโบลาเพิ่มเติม จะเป็นยังไงไปอ่านต่อกันเลย

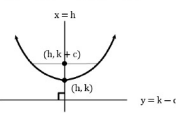
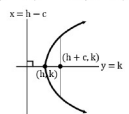
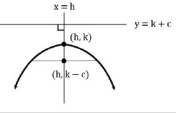
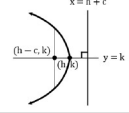
พาราโบลา คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งห่างจากจุดที่ตรึงอยู่กับที่จุดหนึ่ง และเส้นตรงที่ตรึงอยู่กับที่เส้นหนึ่งเป็นระยะเท่ากัน จุดที่ตรึงอยู่กับที่นี้ เรียกว่า โฟกัสของพาราโบลา และเส้นที่ตรึงอยู่กับที่นี้เรียกว่า เส้นบังคับ หรือ ไดเรกทริกซ์ ของพาราโบลา



พาราโบลาสามารถวาดได้ 4 แบบตามรูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลา ซึ่งก็คือ

- พาราโบลาหงายขึ้น
จะมีสมการรูปแบบมาตรฐานคือ $(x - h)^2 = 4c(y - k)$
- พาราโบลาแบบคว่ำ
จะมีสมการรูปแบบมาตรฐานคือ $(x - h)^2 = -4c(y - k)$
- พาราโบลาเปิดขวา
จะมีสมการรูปแบบมาตรฐานคือ $(y - k)^2 = 4c(x - h)$
- พาราโบลาแบบเปิดซ้าย
จะมีสมการรูปแบบมาตรฐานคือ $(y - k)^2 = -4c(x - h)$

พาราโบลา

แกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง	แกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน
เส้นโค้งหงายขึ้น $(x - h)^2 = 4c(y - k)$ 	เส้นโค้งเปิดขวา $(y - k)^2 = 4c(x - h)$ 
เส้นโค้งคว่ำลง $(x - h)^2 = -4c(y - k)$ 	เส้นโค้งเปิดซ้าย $(y - k)^2 = -4c(x - h)$ 

ตัวอย่างที่ 3 จงจัดรูปสมการพาราโบลา $y^2 - 6y + 8x + 17 = 0$
 ให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน

วิธีทำ

จัดสมการพาราโบลาที่กำหนดให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน ดังนี้

$$y^2 - 6y + 9 + 8x + 8 = 0$$

$$y^2 - 6y + 9 = -8x - 8$$

$$(y - 3)^2 = -8(x + 1)$$

$$(y - 3)^2 = -4(2)(x + 1)$$

จากสมการรูปแบบมาตรฐาน เราจะได้ว่า $k = 3, h = -1, c = 2$

พาราโบลานี้เป็นพาราโบลาเปิดซ้ายมีจุดยอดอยู่ที่ $(-1, 3)$, โฟกัสอยู่ที่ $(-3, 3)$

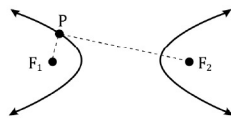
และเส้นไดเรกทริกซ์คือ $x = 1$

ไฮเพอร์โบลา

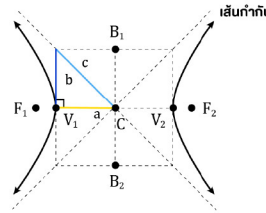
บทนิยามไฮเพอร์โบลาคจะคล้ายกับบทนิยามของวงรี ต่างกันแค่วงรีใช้ผลบวกของระยะทางจากโฟกัสทั้งสองแต่ว่าไฮเพอร์โบลาคจะใช้ผลต่าง

ไฮเพอร์โบลา คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ ไปยังจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุดมีค่าคงตัว ($2a$) โดยค่าคงตัวนี้ต้องน้อยกว่าระยะห่างระหว่างจุดคงที่ที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุด เรียกจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุดนี้ว่า โฟกัสของไฮเพอร์โบลา

ไฮเพอร์โบลา



บทนิยาม $|PF_1 - PF_2| = 2a$
องค์ประกอบ
แกนตามขวาง V_1V_2 ยาว $2a$ หน่วย
 C คือ จุดศูนย์กลาง
แกนสังยุค B_1B_2 ยาว $2b$ หน่วย
 F_1 และ F_2 คือ โฟกัส



SmartMathPro

ไฮเพอร์โบลาสามารถวาดได้ 2 แบบตามรูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลา ซึ่งก็คือ

- ไฮเพอร์โบลาแกนตามขวางอยู่ในแนวนอน

จะมีสมการรูปแบบมาตรฐานคือ $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

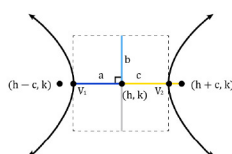
- ไฮเพอร์โบลาแกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง

จะมีสมการรูปแบบมาตรฐานคือ $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

ไฮเพอร์โบลา

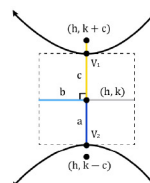
แกนตามขวางอยู่ในแนวนอน

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



แกนตามขวางอยู่ในแนวตั้ง

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



โดยที่ $a > 0$ และ $b > 0$ และ $c^2 = a^2 + b^2$ (ค่า c มากที่สุด)

SmartMathPro

SmartMathPro
" ตัวเต๋อที่เป็นมากกว่าตัวเต๋อ "

ตัวอย่างที่ 4 จงจัดรูปสมการไฮเพอร์โบลา $16x^2 - 9y^2 + 160x + 72y + 112 = 0$
ให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน

วิธีทำ

จัดสมการพาราโบลาที่กำหนดให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน ดังนี้

$$16x^2 + 160x - 9y^2 + 72y + 112 = 0$$

$$16(x^2 + 10x) - 9(y^2 - 8y) + 112 = 0$$

$$16(x^2 + 10x) + 16(25) - 16(25) - 9(y^2 - 8y) - 9(16) + 9(16) + 112 = 0$$

$$16(x^2 + 10x + 25) - 16(25) - 9(y^2 - 8y + 16) + 9(16) + 112 = 0$$

$$16(x + 5)^2 - 9(y - 4)^2 - 400 + 144 + 112 = 0$$

$$16(x + 5)^2 - 9(y - 4)^2 = 144$$

$$\frac{16(x + 5)^2}{144} - \frac{9(y - 4)^2}{144} = 1$$

$$\frac{(x + 5)^2}{9} - \frac{(y - 4)^2}{16} = 1$$

$$\frac{(x + 5)^2}{3^2} - \frac{(y - 4)^2}{4^2} = 1$$

จากสมการรูปแบบมาตรฐาน เราจะได้ว่า $h = -5, k = 4, a = 3, b = 4, c = 5$

ไฮเพอร์โบลานี้เป็นไฮเพอร์โบลาแกนตามขวางอยู่ในแนวนอนที่มีจุดศูนย์กลาง
อยู่ที่ $(-5, 4)$, จุดยอดอยู่ที่ $(-8, 4)$, และ $(-2, 4)$ ส่วนโฟกัสอยู่ที่ $(-10, 4)$
และ $(0, 4)$

“เวลาที่ดียิ่งสุดในการเริ่มต้น คือ ตอนนี้”

- พี่ป๊น SmartMathPro -

สนใจติวคณิตศาสตร์เพิ่มเติม online.smartmathpro.com