

แยกตัวประกอบของพหุนาม ที่มีดีกรีสูงกว่าสอง ม.3

การแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีดีกรีสูงกว่าสอง

ในระดับชั้น ม.2 น้อง ๆ เคยเรียนเกี่ยวกับการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองมาแล้วจากชื่อของบทนี้ก็จะเห็นว่าพหุนามที่เราจะแยกตัวประกอบมีดีกรีสูงขึ้นไปกว่าที่เคยเรียนมา ดังนั้น เรามาทบทวนความหมายกันก่อนนะ

พหุนาม

คือ นิพจน์ที่อยู่ในรูปการบวกกันของเอกนามตั้งแต่สองเอกนามขึ้นไปได้ เช่น

- $x^3 + 8$
- $x^2 - 2x - 1$

ดีกรีของพหุนาม

คือ ดีกรีสูงสุดของพจน์ของพหุนามในรูปผลสำเร็จ เช่น

- $2x - 1$ เป็นพหุนามที่มีดีกรีเท่ากับ 1
- $4x^3 - x^2 + 1$ เป็นพหุนามที่มีดีกรีเท่ากับ 3

การแยกตัวประกอบของพหุนาม

คือ การเขียนพหุนามที่กำหนดให้อยู่ในรูปของการคูณกันของพหุนามตั้งแต่สองพหุนามขึ้นไป เช่น

- $10x^3 + 5x$ แยกตัวประกอบได้เป็น $(5x)(2x^2 + 1)$
- $x^4 - 3^2 + x$ แยกตัวประกอบได้เป็น $(x)(x^3 + 3x + 1)$

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นว่าเราสามารถแยกตัวประกอบของ $5x^3 + x$ ซึ่งเป็นพหุนามดีกรีสาม และ $x^4 + 3x^2 + x$ ซึ่งเป็นพหุนามดีกรีสี่ได้ด้วยวิธีการดึงตัวร่วม

ถ้าเป็นพหุนามดีกรีสามหรือตั้งแต่สามขึ้นไป (ตามชื่อบท นั่นคือเราจะมาแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีดีกรีสูงกว่าสองกัน) ที่ไม่สามารถแยกตัวประกอบด้วยวิธีดึงตัวร่วมได้อย่างเช่นตัวอย่างด้านล่างนี้

- $x^3 + 8$
- $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
- $x^4 + 2x^2 - 3$
- $x^3y^6 - 8$

จะแยกตัวประกอบอย่างไรดี ? ในบทเรียนนี้จะมีคำตอบให้น้อง ๆ เลย เราสามารถใช้สูตรต่าง ๆ หรือใช้ความรู้เดิมนั่นคือการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง (แยกสองวงเล็บ) มาใช้ต่อยอดได้นะ

การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสาม

หัวข้อนี้จะกล่าวถึงการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสาม ที่แต่ละพจน์มีสัมประสิทธิ์และค่าคงตัวเป็นจำนวนเต็ม ซึ่งพหุนามจะอยู่ในรูปของผลบวกและผลต่างของกำลังสาม รวมถึงกำลังสามสมบูรณ์ ซึ่งจะมีวิธีการแยกตัวประกอบโดยใช้สูตรดังนี้

ผลบวกและผลต่างของกำลังสาม

ในกรณีทั่วไป เมื่อ A และ B เป็นพหุนาม
การแยกตัวประกอบของพหุนามทำได้ตามสูตร ดังนี้

ผลบวกของกำลังสาม	ผลต่างของกำลังสาม
$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$	$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$

หมายเหตุ :

สังเกตเครื่องหมายบวกและลบให้ดีนะ ! ว่าเครื่องหมายบวกและลบอยู่ตรงไหนบ้าง

SmartMathPro
* ตัวเลขที่มีเป็นมากกว่าตัวเลข *

ถ้าน้องสังเกตเห็นว่าเป็นพหุนามที่น่าจะเขียนให้อยู่ในรูปผลบวกของกำลังสาม $A^3 + B^3$ หรือผลต่างของกำลังสาม $A^3 - B^3$ ได้ ให้ลองจัดรูปดู

ถ้ามีตัวไหนที่ไม่ได้อยู่ในรูปของกำลังสามของจำนวนนั้นหรือตัวแปรนั้นให้เขียนให้เรียบร้อย เช่น 8 คือกำลังสามของ 2 และ $27y^3$ คือกำลังสามของ $3y$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสามต่อไปนี้

1.) $x^3 + 8$

วิธีทำ จาก $x^3 + 8$ แยกตัวประกอบได้ดังนี้

$$\begin{aligned}x^3 + 8 &= x^3 + 2^3 \\ &= (x + 2)(x^2 - (x)(2) + 2^2) \\ &= (x + 2)(x^2 - 2x + 4)\end{aligned}$$

ดังนั้น $x^3 + 8$ แยกตัวประกอบได้เป็น $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

$$2.) 27y^3 - 125$$

วิธีทำ จาก $27y^3 - 125$ แยกตัวประกอบได้ดังนี้

$$\begin{aligned} 27y^3 - 125 &= (3y)^3 - 5^3 \\ &= (3y - 5) [(3y)^2 + (3y)(5) + 5^2] \\ &= (3y - 5)(9y^2 + 15y + 25) \end{aligned}$$

ดังนั้น $27y^3 - 125$ แยกตัวประกอบได้เป็น $(3y - 5)(9y^2 + 15y + 25)$

กำลังสามสมบูรณ์

ในกรณีทั่วไป เมื่อ A และ B เป็นพหุนาม
การแยกตัวประกอบของพหุนามทำได้ตามสูตร ดังนี้

กำลังสามสมบูรณ์

$$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A + B)^3$$

$$A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = (A - B)^3$$

หมายเหตุ :

สังเกตเครื่องหมายบวกและลบให้ดีนะ ! เครื่องหมายบวกและลบอยู่ตรงไหนบ้างจะมีแบบที่เป็น
เครื่องหมายบวกทั้งหมดเลยกับอีกแบบที่เป็นเครื่องหมายบวกกับลบสลับกัน

ถ้าน้องสังเกตเห็นว่าเป็นพหุนามที่น่าจะเขียนให้อยู่ในรูป $A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ หรือ $A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$ ได้ นั่นคือลองเขียนพจน์แรกและท้ายสุดให้อยู่ในรูปของกำลังสาม เพื่อหาว่าจากโจทย์ A และ B มีค่าเท่าใด จากนั้นตรวจสอบพจน์ตรงกลางสองพจน์ โดยใช้ A และ B ที่ได้มาพิจารณาว่าสามารถเขียนให้อยู่ในรูป $-3A^2B$ และ $3AB^2$ ได้หรือไม่ ถ้าได้ พหุนามที่โจทย์กำหนด คือพหุนามที่อยู่ในรูปกำลังสามสมบูรณ์

ตัวอย่างที่ 2 จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

1.) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

วิธีทำ จะได้ $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 + 3(x^2)(2) + 3(x)(2^2) + 2^3$

จากสูตร $A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = (A + B)^3$

จะได้ $A = x$ และ $B = 2$

ดังนั้น $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x + 2)^3$

2.) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$

วิธีทำ จะได้ $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = x^3 - 3(x^2)(3) + 3(x)(3^2) - 3^3$

จากสูตร $A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 = (A - B)^3$

จะได้ $A = x$ และ $B = 3$

ดังนั้น $x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = (x - 3)^3$

การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสูงกว่าสาม

การแยกตัวประกอบของพหุนามที่มีดีกรีสูงกว่าสาม อาจทำได้โดยจัดพหุนามให้อยู่ในรูปผลต่างของกำลังสอง กำลังสองสมบูรณ์ ผลบวกกำลังสาม ผลต่างกำลังสาม หรือใช้แนวคิดของการแยกตัวประกอบพหุนามดีกรีสอง

จัดให้อยู่ในรูปผลต่างของกำลังสอง

จัดให้อยู่ในรูปผลต่างของกำลังสอง

ถ้า A และ B เป็นพหุนาม

อาจแยกตัวประกอบของพหุนามที่เป็นผลต่างของกำลังสอง ได้ดังนี้

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

ตัวอย่างที่ 3 จงแยกตัวประกอบของพหุนาม $x^4 - 16$

วิธีทำ จากรูปแบบของผลต่างกำลังสอง $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ แยกตัวประกอบได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } x^4 - 16 &= (x^2)^2 - (4^2) \\ &= (x^2 + 4)(x^2 - 4) \\ &= (x^2 + 4)(x^2 - 2^2) \\ &= (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2) \end{aligned}$$

เนื่องจาก $x^2 + 4$ ไม่สามารถแยกตัวประกอบต่อได้


ดังนั้น $x^4 - 16$ แยกตัวประกอบได้เป็น $(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$

จัดให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์

จัดให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์

ถ้า A และ B เป็นพหุนาม
จะแยกตัวประกอบของพหุนามที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ได้

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$$
$$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$$

 SmartMathPro
Smart Math Pro

ตัวอย่างที่ 4 จงแยกตัวประกอบของพหุนาม $x^4 + 32x^2 + 256$

วิธีทำ กำหนดให้ $K = x^2$

จากรูปแบบของกำลังสองสมบูรณ์ $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$ แยกตัวประกอบได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } x^4 + 32x^2 + 256 &= (x^2)^2 + 32x^2 + 256 \\ &= K^2 + 32K + 256 \\ &= K^2 + 2(16)K + 16^2 \\ &= (K + 16)^2 \\ &= (x^2 + 16)^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x^4 + 32x^2 + 256$ แยกตัวประกอบได้เป็น $(x^2 + 16)^2$

ข้อสังเกต ! สามารถสมมติตัวแปรเป็น K ได้นะ เพื่อให้เรามองพหุนามดีกรีสี่เป็นพหุนามดีกรีสองได้
จะได้แยกตัวประกอบได้ง่ายขึ้น แต่อย่าลืมเปลี่ยน K กลับมาเป็น x ด้วยนะ

จัดให้อยู่ในรูปผลบวกของกำลังสาม หรือผลต่างของกำลังสาม

ตัวอย่างที่ 5 จงแยกตัวประกอบของพหุนาม $x^3y^6 - 8$

วิธีทำ จากรูปแบบของผลต่างกำลังสาม $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$ แยกตัวประกอบได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } x^3y^6 - 8 &= (xy^2)^3 - 2^3 \\ &= [xy^2 - 2][(xy^2)^2 + (xy^2)(2) + 2^2] \\ &= (xy^2 - 2)(x^2y^4 + 2xy^2 + 4) \end{aligned}$$

ดังนั้น $x^3y^6 - 8$ แยกตัวประกอบได้เป็น $(xy^2 - 2)(x^2y^4 + 2xy^2 + 4)$

ใช้แนวคิดจากการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง

บททวนแนวคิดการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองโดยแยกเป็นสองวงเล็บ

พหุนามที่อยู่ในรูป $ax^2 + bx + c$ แยกตัวประกอบเป็น

$(px + r)(qx + s)$ เมื่อ $pq = a$, $rs = c$ และ a, b, c, p, q, r, s เป็นจำนวนเต็ม และ $a \neq 0$

เช่น

$$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$$

$$6x^2 - 11x + 3 = (3x - 1)(2x - 3)$$

จากตัวอย่างข้างต้น ถ้าเราสามารถเขียนพหุนามที่มีดีกรีสูงกว่าสองนี้ให้อยู่ในรูปของพหุนามดีกรีสองได้ โดยอาจสมมติตัวแปรเป็น K เช่นที่เคยทำในตัวอย่างก่อนหน้า แล้วเราก็จะแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสูงกว่าสองเป็นสองวงเล็บได้เช่นกัน

สามารถเปรียบเทียบการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง ซึ่งเป็นความรู้เดิม โดยการแยกตัวประกอบของพหุนามโดยนำแนวคิดมาใช้ ดังนี้

การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง (ความรู้เดิม)

ตัวอย่างที่ 6 จงแยกตัวประกอบของพหุนาม $x^2 + 2x - 3$

วิธีทำ พิจารณา $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$

ดังนั้น $x^2 + 2x - 3$ แยกตัวประกอบได้เป็น $(x + 3)(x - 1)$

การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสูงกว่าสาม (นำแนวคิดมาใช้)

ตัวอย่างที่ 7 จงแยกตัวประกอบของพหุนาม $x^4 + 2x^2 - 3$

วิธีทำ กำหนดให้ $K = x^2$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } x^4 + 2x^2 - 3 &= (x^2)^2 + 2x^2 - 3 \\ &= K^2 + 2K - 3 \\ &= (K + 3)(K - 1) \\ &= (x^2 + 3)(x^2 - 1) \\ &= (x^2 + 3)(x^2 - 1^2) \\ &= (x^2 + 3)(x + 1)(x - 1) \end{aligned}$$

ดังนั้น $x^4 + 2x^2 - 3$ แยกตัวประกอบได้เป็น $(x^2 + 3)(x + 1)(x - 1)$

“เวลาที่ดียิ่งที่สุดในการเริ่มต้น คือ ตอนนี่”

- พี่ปุ่น SmartMathPro -

สนใจติวคณิตศาสตร์เพิ่มเติม <https://online.smartmathpro.com/>