

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและลอการิทึม ม.4

เลขยกกำลัง

น้อง ๆ น่าจะเคยเรียนเรื่องเลขยกกำลังมาแล้ว ตอนม.ต้น เกี่ยวกับความหมายของเลขยกกำลัง การคูณและการหารเลขยกกำลัง การเขียนสัญกรณ์วิทยาศาสตร์ รวมถึงสมบัติต่าง ๆ ของเลขยกกำลัง ในระดับชั้นม.5 นี้ เราจะมาทบทวนและเรียนเกี่ยวกับความหมายและสมบัติต่าง ๆ ของเลขยกกำลัง อีกครั้ง แต่เป็นในรูปแบบที่ท้าทายขึ้น มาลองดูกันเลย

บทนิยาม

ให้ a เป็นจำนวนจริงและ n เป็นจำนวนเต็มบวก

$$a^n = a \times a \times a \times \cdots \times a$$

(a คูณกันทั้งหมด n ตัว)

เรียก a^n ว่าเลขยกกำลัง เรียก a ว่า ฐานของเลขยกกำลัง และเรียก n ว่า เลขชี้กำลัง

สมบัติเลขยกกำลัง

กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์ และ m, n เป็นจำนวนตรรกยะ

- $a^0 = 1$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

เราจะนำสมบัติเลขยกกำลังมาใช้เพื่อหาค่าหรือจัดรูป ลองมาดูการใช้สมบัติผ่านตัวอย่างนี้กัน

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียน $\frac{(27^2 \times 9^{-2})^3}{3^{15}}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย และเลขยกกำลังทุกตัวมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

วิธีทำ

$$\begin{aligned} & \frac{(27^2 \times 9^{-2})^3}{3^{15}} \\ &= \frac{((3^3)^2 \times (3^2)^{-2})^3}{3^{15}} \\ &= \frac{3^{18} \times 3^{-12}}{3^{15}} \\ &= \frac{3^{18}}{3^{27}} \\ &= \frac{1}{3^9} \end{aligned}$$

รากที่ n ของจำนวนจริง และจำนวนจริงที่อยู่ในรูปกรณฑ์

บทนิยาม

กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มีมากกว่า 1

- รากที่ n ของจำนวนจริง

y เป็นรากที่ n ของ x ก็ต่อเมื่อ $y^n = x$

- ค่าหลักของรากที่ n

y เป็นค่าหลักของรากที่ n ของ x ก็ต่อเมื่อ

y เป็นรากที่ n ของ x และ $xy \geq 0$

พื้ขอยกตัวอย่างเพิ่มเติมจากบทนิยาม จะได้ว่า

- รากที่ 2 ของ 9 คือ 3 และ -3
- รากที่ 5 ของ -32 คือ -2
- ค่าหลักของรากที่ 2 ของ 36 คือ 6
- $\sqrt{36} = 6$

จะเห็นได้ว่า ค่าหลักของรากที่ n ของ x มีค่าเท่ากับ กรณฑ์ที่ n ของ x นั่นคือค่าหลักของรากที่ n ของ $x = \sqrt[n]{x}$

ตัวอย่างที่ 2 $\frac{\sqrt{4 \cdot \sqrt[3]{5^3}}}{\sqrt[3]{-8}} + \sqrt{(-7)^2}$ เท่ากับเท่าใด

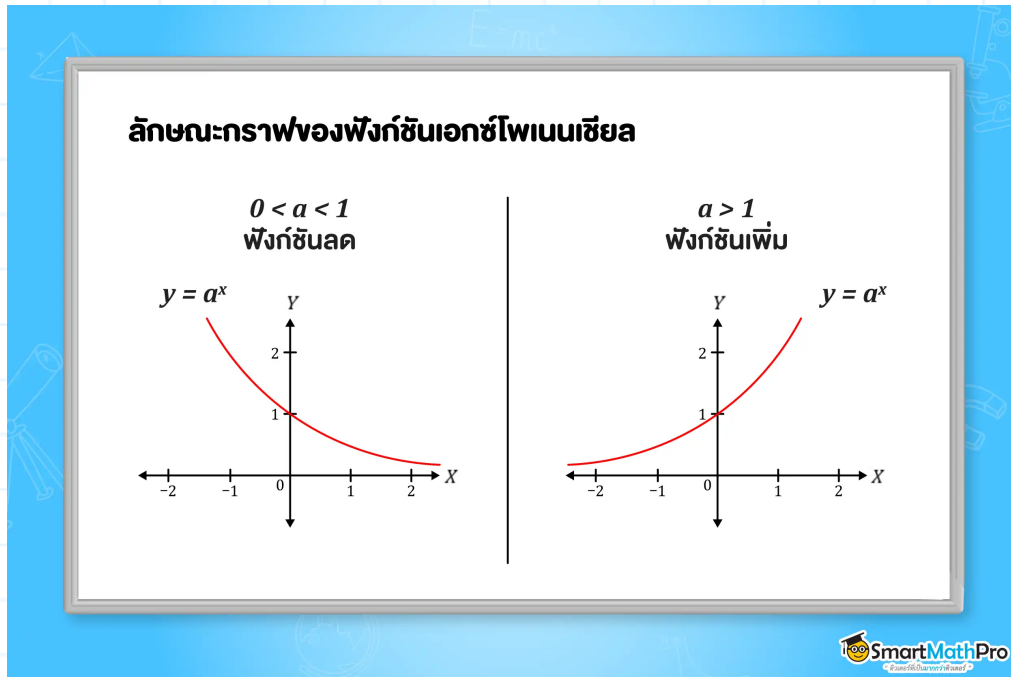
วิธีทำ

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{4 \cdot \sqrt[3]{5^3}}}{\sqrt[3]{-8}} + \sqrt{(-7)^2} \\ &= \frac{2 \cdot 5}{-2} + \sqrt{49} \\ &= -5 + 7 \\ &= 2 \end{aligned}$$

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

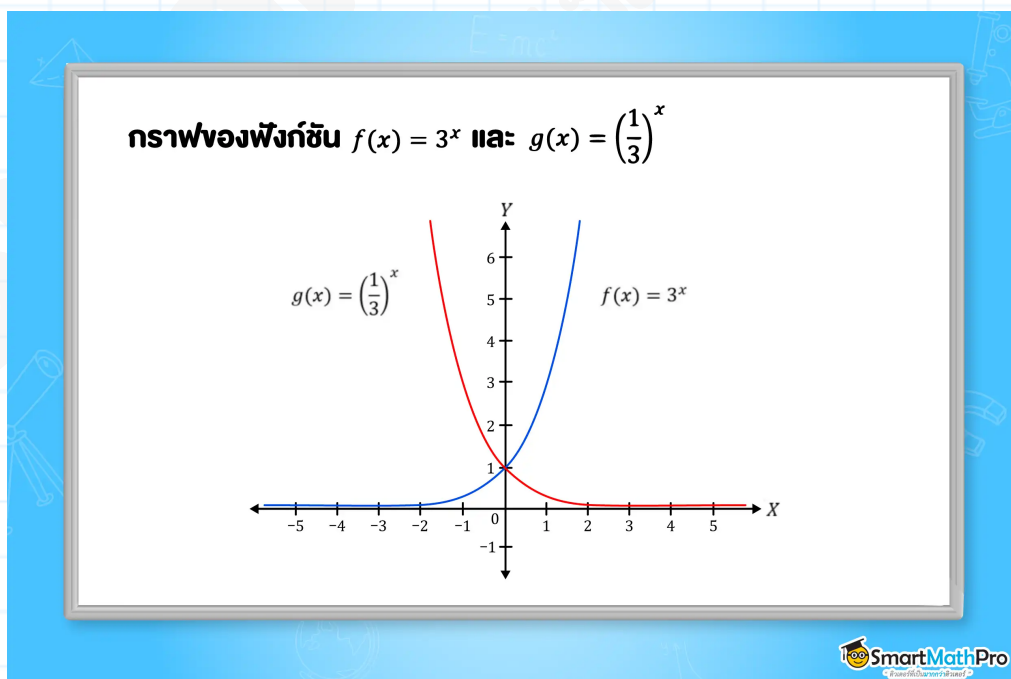
ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = a^x\}$
โดยที่ a เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a > 0$ และ $a \neq 1$

พิจารณาลักษณะกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล



จากกราฟน้องจะเห็นว่าฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลจะเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดนั้นขึ้นอยู่กับค่า a

ตัวอย่างที่ 3 จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = 3^x$ และ $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ลงในระบบพิกัดฉากเดียวกัน



จากกราฟที่เราได้ น้องจะเห็นว่า $f(x) = 3^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มเพราะ a มีค่ามากกว่า 1 และ $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ เป็นฟังก์ชันลดเพราะ a มีค่าอยู่ระหว่าง 0 กับ 1

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = 2^x$ จงพิจารณาว่ากราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้เกิดจากการเลื่อนจุดทุกจุดของฟังก์ชัน $f(x)$ อย่างไร

1. $g(x) = 2^x + 1$

ตอบ กราฟของ $g(x)$ คือกราฟของ $f(x)$ ที่เลื่อนจุดทุกจุดขึ้น 1 หน่วย

2. $h(x) = 2^{x+1}$

ตอบ กราฟของ $h(x)$ คือกราฟของ $f(x)$ ที่เลื่อนจุดทุกจุดไปทางซ้าย 1 หน่วย

จากตัวอย่างที่ 4 น้อย ๆ อาจคิดว่า การพิจารณาว่ากราฟเลื่อนไปทางไหนซับซ้อน แต่การเลื่อนกราฟไม่ใช่เรื่องยากอย่างที่คิดนะ พี่ก็ได้สรุปเรื่องการเลื่อนกราฟมาให้แล้ว มาดูกันเลย

กราฟ $y = a^{(x-h)} + k$ คือการเลื่อนกราฟ $y = a^x$ ดังนี้

- ถ้า h มีค่าเป็น**บวก**จะเลื่อนจุดทุกจุดไปทาง**ขวา** h หน่วย
- ถ้า h มีค่าเป็น**ลบ**จะเลื่อนจุดทุกจุดไปทาง**ซ้าย** h หน่วย
- ถ้า k มีค่าเป็น**บวก**จะเลื่อนจุดทุกจุด**ขึ้น** k หน่วย
- ถ้า k มีค่าเป็น**ลบ**จะเลื่อนจุดทุกจุด**ลง** k หน่วย

หลังจากที่เรารู้จักฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลไปแล้ว เราารู้จักสมการและอสมการเอกซ์โพเนนเชียลกันบ้าง ซึ่งก็คือสมการและอสมการที่มีเลขชี้กำลังเป็นตัวแปร ในการแก้สมการและอสมการจะใช้สมบัติความเป็นฟังก์ชัน 1-1 ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลดด้วย

สมการเอกซ์โพเนนเชียล

หลักการแก้สมการเอกซ์โพเนนเชียล มีดังนี้

- ให้ $a > 0$ และ $a \neq 1$ จะได้ว่า $a^x = a^y$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$
- ให้ $a, b > 0$ โดยที่ $a \neq b$ ถ้า $a^x = b^x$ แล้ว $x = 0$

สรุปง่าย ๆ ก็คือถ้าฐานมีค่าเท่ากันแล้วเลขชี้กำลังจะมีค่าเท่ากัน และถ้าเลขชี้กำลังมีค่าเท่ากันแต่ฐานมีค่าไม่เท่ากันแล้วเลขชี้กำลังจะเท่ากับ 0

ตัวอย่างที่ 5 จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้

1. $2^{2x} = 4^8$

วิธีทำ จะได้ว่า $2^{2x} = (2^2)^8$

$$2^{2x} = 2^{16}$$

$$2x = 16$$

$$x = 8$$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{8\}$

2. $3^{10x+2} = 4^{5x+1}$

วิธีทำ จะได้ว่า $3^{10x+2} = (2^2)^{5x+1}$

$$3^{10x+2} = 2^{10x+2}$$

$$10x + 2 = 0$$

$$x = -\frac{1}{5}$$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{-\frac{1}{5}\}$

อสมการเอกซ์โพเนนเชียล

หลักการแก้อสมการเอกซ์โพเนนเชียล มีดังนี้

1. อสมการ $a^m > a^n$

- ถ้า $a > 1$ แล้ว $m > n$
- ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $m < n$

2. อสมการ $a^m < a^n$

- ถ้า $a > 1$ แล้ว $m < n$
- ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $m > n$

สังเกตได้ว่า ถ้าฐานมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 จะต้องกลับเครื่องหมายของอสมการด้วย

ตัวอย่างที่ 6 จงหาคำตอบของอสมการต่อไปนี้

1. $10^{3x} > 1000$

วิธีทำ จะได้ว่า $10^{3x} > 10^3$

$$3x > 3$$

ดังนั้น $x > 1$

2. $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} < \frac{1}{27}$

วิธีทำ จะได้ว่า $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} < \left(\frac{1}{3}\right)^3$

$$2x + 1 > 3$$

$$2x > 2$$

ดังนั้น $x > 1$

ฟังก์ชันลอการิทึม

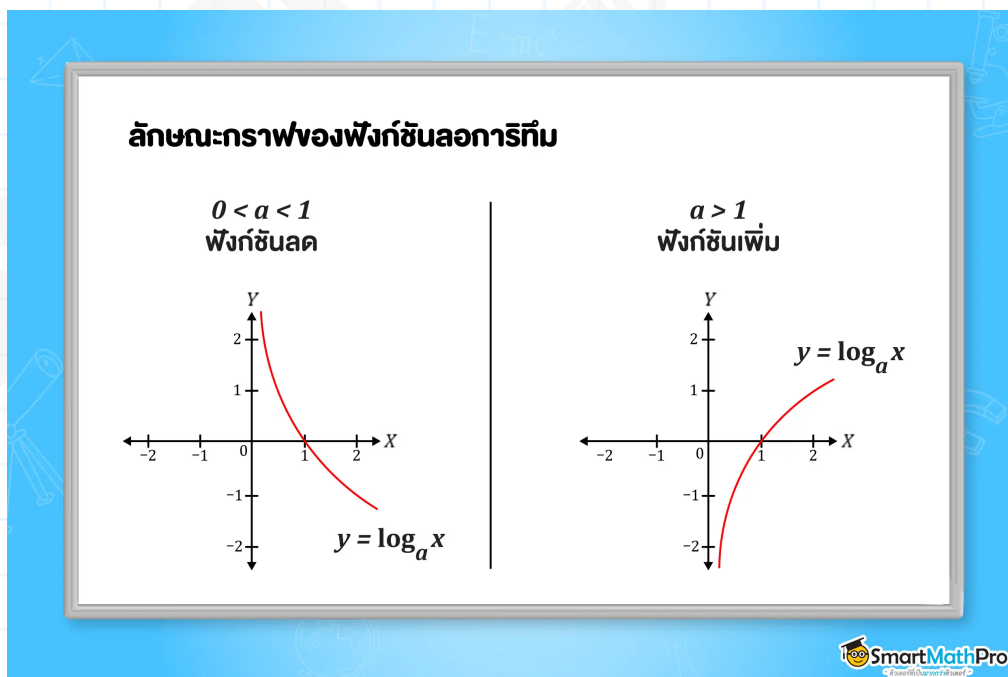
ฟังก์ชันลอการิทึม คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $\{(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mid y = \log_a x\}$

โดยที่ a เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a > 0$ และ $a \neq 1$

ฟังก์ชันลอการิทึม คือ ตัวผกผันของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล นั่นคือ

$$x = a^y \text{ ก็ต่อเมื่อ } y = \log_a x$$

ลักษณะกราฟของฟังก์ชันลอการิทึมเป็นดังนี้



จากกราฟ นื่องจะเห็นว่าฟังก์ชันลอการิทึมจะเป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดนั้นขึ้นอยู่กับค่า a

ตัวอย่างที่ 7 กำหนด $f(x) = \log_2 x$ จงพิจารณาว่ากราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้เกิดจากการเลื่อนจุดทุกจุดของฟังก์ชัน $f(x)$ อย่างไร

แนวคิด ใช้วิธีการเลื่อนกราฟคล้ายตัวอย่างที่ 4 เลย !

1. $g(x) = \log_2(x) - 1$

ตอบ กราฟของ $g(x)$ คือกราฟของ $f(x)$ ที่เลื่อนจุดทุกจุดลง 1 หน่วย

2. $h(x) = \log_2(x - 1)$

ตอบ กราฟของ $h(x)$ คือกราฟของ $f(x)$ ที่เลื่อนจุดทุกจุดไปทางขวา 1 หน่วย

สมบัติของฟังก์ชันลอการิทึม

ให้ a , M และ N เป็นจำนวนจริงบวกที่ $a \neq 1$ และ k เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

- $\log_a a = 1$ และ $\log_a 1 = 0$
- $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
- $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
- $\log_a M^k = k \log_a M$
- $\log_a M^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k} \log_a M$ เมื่อ $k \neq 0$
- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ เมื่อ $b > 0$ และ $b \neq 1$
- $\log_a M = \frac{\log_c M}{\log_c a}$ เมื่อ $c > 0$ และ $c \neq 1$
- $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

ตัวอย่างที่ 8 จงหาค่าของ $\log_4 32 + \log_4 2$

วิธีทำ $\log_4 32 + \log_4 2$

$$= \log_4 (32 \times 2)$$

$$= \log_4 64$$

$$= \log_4 4^3$$

$$= 3 \times \log_4 4$$

$$= 3 \times 1$$

$$= 3$$

มุมความรู้

เมื่อ $\log$ ไม่ได้เขียนเลขฐานจะถือว่าเป็น ฐาน 10

สมการลอการิทึม

หลักการแก้สมการลอการิทึม มีดังนี้

1. ให้ $a > 0$ และ $a \neq 1$ จะได้ว่า $\log_a x = \log_a y$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$
2. ให้ $\log_a x = y$ จะได้ว่า $x = a^y$

ตัวอย่างที่ 9 จงหาเซตคำตอบของสมการ $\log(x - 1) + \log(x + 2) = 1$

วิธีทำ $\log(x - 1) + \log(x + 2) = 1$

$$(x - 1)(x + 2) = 10$$

$$x^2 + x - 2 = 10$$

$$x^2 + x - 12 = 0$$

$$(x + 4)(x - 3) = 0$$

จะได้ว่า $x = -4$ หรือ $x = 3$

ตรวจสอบค่า x ที่ได้จากค่าใดสอดคล้องกับสมการที่กำหนดให้

- กรณี $x = -4$

แทน $x = -4$ ใน $\log(x - 1) + \log(x + 2) = 1$

จะได้ $\log(-5) + \log(-2) = 1$ เป็นเท็จ

เนื่องจากไม่นิยาม $y = \log_a x$ เมื่อ x ไม่เป็นจำนวนจริงบวก

แสดงว่า -4 ไม่สอดคล้องกับสมการที่กำหนดให้

- กรณี $x = 3$

แทน $x = 3$ ใน $\log(x - 1) + \log(x + 2) = 1$

จะได้ $\log(2) + \log(5) = \log(5 \times 2) = \log 10 = 1$ เป็นจริง

แสดงว่า 3 สอดคล้องกับสมการที่กำหนดให้

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ คือ $\{3\}$

ระวัง!! อย่าลืมเช็คเสมอว่าคำตอบที่ได้จากการแก้สมการ ทำให้หลัง $\log$ ติดลบหรือไม่ด้วย

อสมการลอการิทึม

หลักการแก้อสมการลอการิทึม มีดังนี้

1. อสมการ $\log_a m > \log_a n$
 - ถ้า $a > 1$ แล้ว $m > n$
 - ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $m < n$
2. อสมการ $\log_a m < \log_a n$
 - ถ้า $a > 1$ แล้ว $m < n$
 - ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $m > n$

ตัวอย่างที่ 10 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) - \log_{\frac{1}{2}}(x+1) < 2$

วิธีทำ $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) - \log_{\frac{1}{2}}(x+1) < 2$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x+2}{x+1}\right) < 2\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x+2}{x+1}\right) < \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x+2}{x+1}\right) < \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right)$$

เนื่องจาก $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ เป็นฟังก์ชันลด

$$\frac{x+2}{x+1} > \frac{1}{4}$$

$$\frac{x+2}{x+1} - \frac{1}{4} > 0$$

$$\frac{4(x+2) - (x+1)}{4(x+1)} > 0$$

$$\frac{3x+7}{4x+4} > 0$$

$$\text{จะได้ } x < -\frac{7}{3} \text{ และ } x > -1$$

เนื่องจาก อสมการที่กำหนดให้มีพจน์ $\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$ และ $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$

$$\text{จะได้ว่า } x > -2 \text{ และ } x > -1$$

$$\text{นั่นคือ } x > -1$$

ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการ คือ $(-1, \infty)$

ระวัง!! อย่าลืมเช็คเสมอว่าคำตอบที่ได้จากการแก้อสมการ ทำให้หลัง log ติดลบหรือไม่ และถ้าฐานน้อยกว่า 1 แต่มากกว่า 0 แล้ว ต้องกลับเครื่องหมายอสมการนั้นด้วย

“เวลาที่ดียิ่งที่สุดในการเริ่มต้น คือ ตอนนี้”

- พี่ปุ่น SmartMathPro -

สนใจติวคณิตศาสตร์เพิ่มเติม online.smartmathpro.com