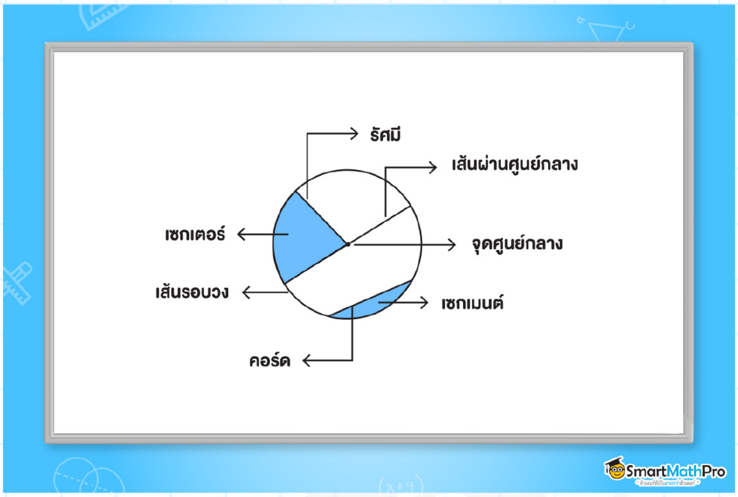
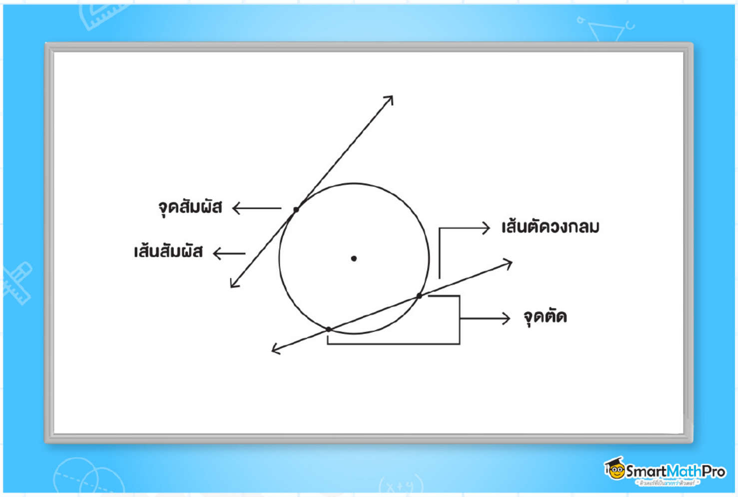
วงกลม ม.3

ส่วนประกอบต่าง ๆ ของวงกลม





จากรูปด้านบนนี้ จะเห็นว่ามีส่วนประกอบหลัก ๆ อยู่ 11 องค์ประกอบ คือ

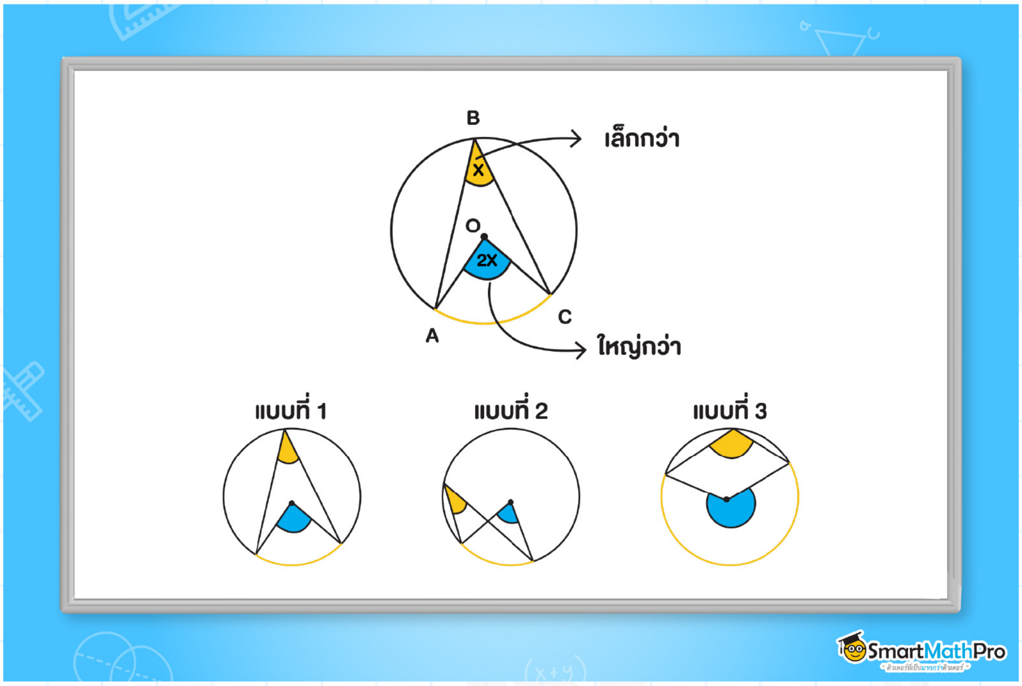
1. จุดศูนย์กลาง คือ จุดที่จุดทุกจุดบนวงกลมที่อยู่ห่างจากจุดตรึงนี้เป็นระยะเท่ากัน
2. เส้นผ่านศูนย์กลาง คือ ส่วนของเส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลาง และมีจุดปลายทั้งสองอยู่บนเส้นรอบวง
3. เส้นรอบวง คือ เส้นโค้งที่ปิดบนระนาบที่แสดงเป็นวงกลม
4. รัศมี คือ ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางกับ จุดใด ๆ บนเส้นรอบวง
5. คอร์ด คือ ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากเส้นรอบวงฝั่งหนึ่ง ไปยังเส้นรอบวงอีกฝั่งหนึ่ง
6. เซกเมนต์ คือ พื้นที่ที่ล้อมถูกรอบด้วยส่วนของเส้นรอบวงและคอร์ด
7. เซกเตอร์ คือ พื้นที่ที่ล้อมถูกรอบด้วยส่วนของเส้นรอบวงและรัศมี 2 เส้น
8. เส้นตัดวงกลม คือ เส้นตรงที่ตัดวงกลมสองจุด
9. จุดตัดวงกลม คือ จุดที่เกิดจากการตัดกันระหว่างวงกลมและเส้นตัดวงกลม
10. เส้นสัมผัสวงกลม คือ เส้นตรงที่ตัดวงกลมหนึ่งจุด
11. จุดสัมผัสวงกลม คือ จุดที่เกิดจากการตัดกันระหว่างวงกลมและเส้นสัมผัสวงกลมเพียงหนึ่งจุด

SmartMathPro

มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม

ทฤษฎีบทวงกลมที่ 1

ในวงกลมเดียวกัน มุมที่จุดศูนย์กลางจะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน



จากรูป จะเห็นว่า $A\hat{O}C$ ซึ่งเป็นมุมที่จุดศูนย์กลาง และ $A\hat{B}C$ ซึ่งเป็นมุมในส่วนโค้งที่ถูกรองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน คือส่วนโค้ง AC แล้ว $A\hat{O}C$ (มุมที่จุดศูนย์กลาง) จะใหญ่เป็นสองเท่าของ $A\hat{B}C$ (มุมในส่วนโค้ง)

ซึ่งทฤษฎีบทนี้ สามารถใช้ได้ 3 แบบ ดังรูป จะเห็นว่าทั้งสามแบบมีหน้าตาที่ไม่เหมือนกัน โดยเฉพาะแบบที่ 2 และแบบที่ 3 มองเร็ว ๆ บางคนอาจจะคิดว่านี่คือคนละทฤษฎีบทกันหรือเปล่านะ รูปไม่เห็นจะเหมือนกันเลย แต่ถ้าเราสังเกตจากส่วนโค้งที่รองรับมุม แล้วมันเหมือนกับแบบที่ 1 เลย

ข้อควรระวัง

อย่าจำสลับกันน้า มุมในส่วนโค้งต้องเป็นมุมที่มีขนาดเล็กกว่าเสมอ (สังเกตได้จากรูปข้างต้น)
ถ้า $A\hat{O}C = 60^\circ$ แล้ว $A\hat{B}C = 30^\circ$

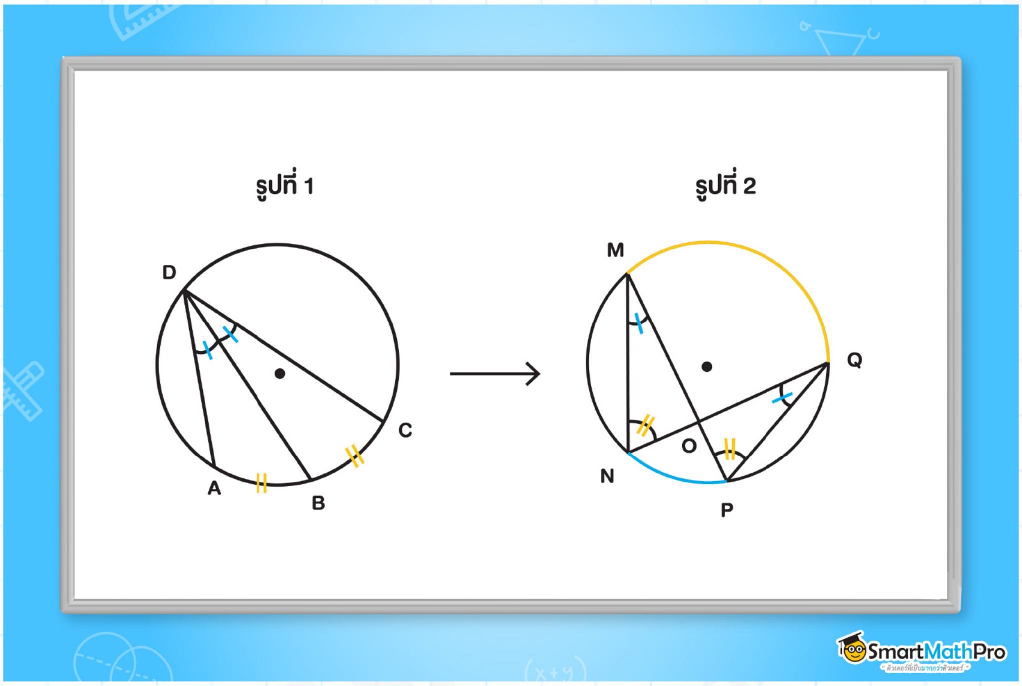
ข้อควรระวัง

และน้อง ๆ ต้องสังเกตดี ๆ น้า ว่ามุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งถูกรองรับด้วยส่วนโค้งใด และจะต้องเป็นส่วนโค้งเดียวกันหรือยาวเท่ากันเท่านั้นนะ ถึงจะใช้ทฤษฎีบทที่ 1 นี้ได้

ทฤษฎีบทวงกลมที่ 2

ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการหรือในวงกลมวงเดียวกัน ถ้ามุมในส่วนโค้งของวงกลมมีขนาดเท่ากัน แล้วส่วนโค้งที่รองรับมุมเหล่านั้นจะยาวเท่ากัน

และขากลับคือ ในวงกลมที่เท่ากันทุกประการหรือในวงกลมวงเดียวกัน ถ้าส่วนโค้งที่รองรับมุมยาวเท่ากัน แล้วมุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเหล่านั้นจะมีขนาดเท่ากัน ซึ่งทฤษฎีบทนี้ จะเป็นจริงทั้งขาไปและขากลับ หรือสามารถกล่าวได้ว่า มุมในส่วนโค้งของวงกลมมีขนาดเท่ากันก็ต่อเมื่อส่วนโค้งที่รองรับมุมยาวเท่ากัน นั่นเอง



รูปที่ 1 และ 2 ข้างต้นนี้ ถ้ามองเร็ว ๆ อาจจะคิดว่ามันคือคนละทฤษฎีบทกันและไม่เกี่ยวกันโดยสิ้นเชิง แต่ในความจริงแล้วไม่เป็นแบบนั้นน้า

ถ้าลองเริ่มสังเกตจากรูปที่ 1 จะเห็นว่า $A\hat{D}B$ และ $B\hat{D}C$ มีขนาดเท่ากันแล้วจะได้ว่าส่วนโค้ง AB ยาวเท่ากับส่วนโค้ง BC (นั่นก็คือ ขาไป) หรือจะมองในทางกลับกันก็ได้นะ คือ ถ้าส่วนโค้งที่รองรับมุมยาวเท่ากัน มุมในส่วนโค้งนั้นก็จะมีขนาดเท่ากันไปด้วย (นั่นก็คือ ขากลับ)

แล้วถ้าเราลองพิจารณาในทำนองเดียวกัน รูปที่ 2 มุมที่รองรับด้วยส่วนโค้ง NP คือ $N\hat{M}P$ และ $N\hat{Q}P$ แล้วทั้งสองมุมจะมีขนาดเท่ากัน (ขากลับ) หรือ มุมที่รองรับด้วยส่วนโค้ง MQ คือ $M\hat{N}Q$ และ $M\hat{P}Q$ แล้วทั้งสองมุมจะมีขนาดเท่ากันเช่นเดียวกัน (ขากลับ)

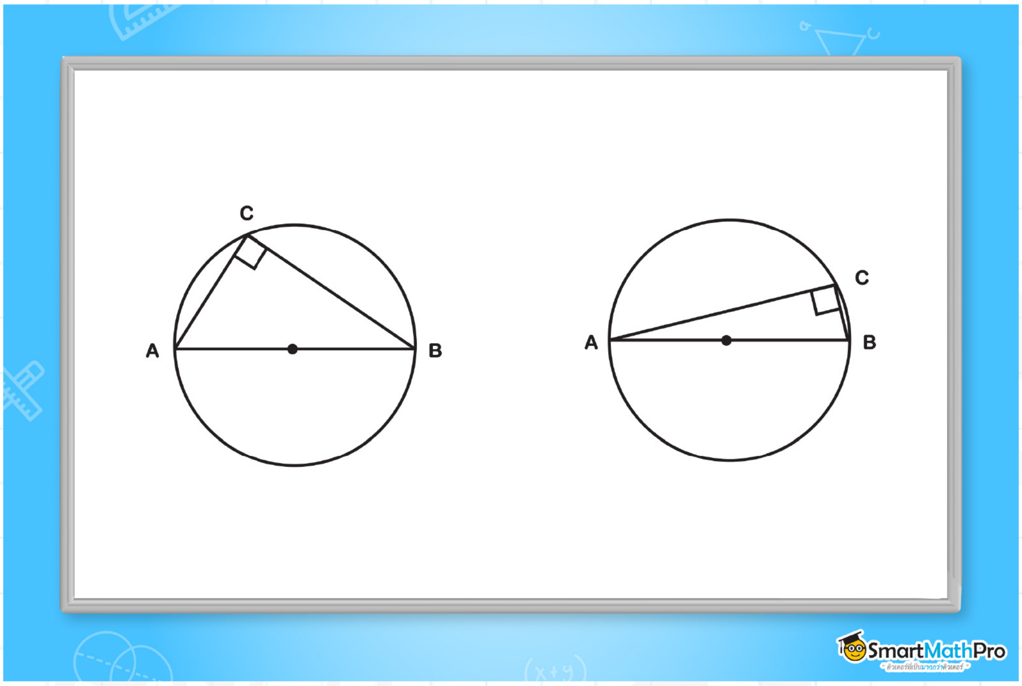
เราจะใช้ทฤษฎีบทนี้เมื่อเจอส่วนโค้งที่ยาวเท่ากัน แล้วสามารถบอกได้ว่ามุมที่เกิดจากส่วนโค้งนั้นมีขนาดเท่ากัน หรือเมื่อเจอมุมที่เกิดจากส่วนโค้งเดียวกัน แล้วมุมที่เกิดขึ้นนั้นก็จะมีขนาดเท่ากันด้วย

ข้อสังเกต

ส่วนโค้ง MQ มีความยาวมากกว่าส่วนโค้ง NP แล้วมุมที่เกิดจากส่วนโค้ง MQ มีขนาดมากกว่ามุมที่เกิดจากส่วนโค้ง NP ด้วยน้า

ทฤษฎีบทวงกลมที่ 3

มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90 องศา หรือหนึ่งมุมฉาก

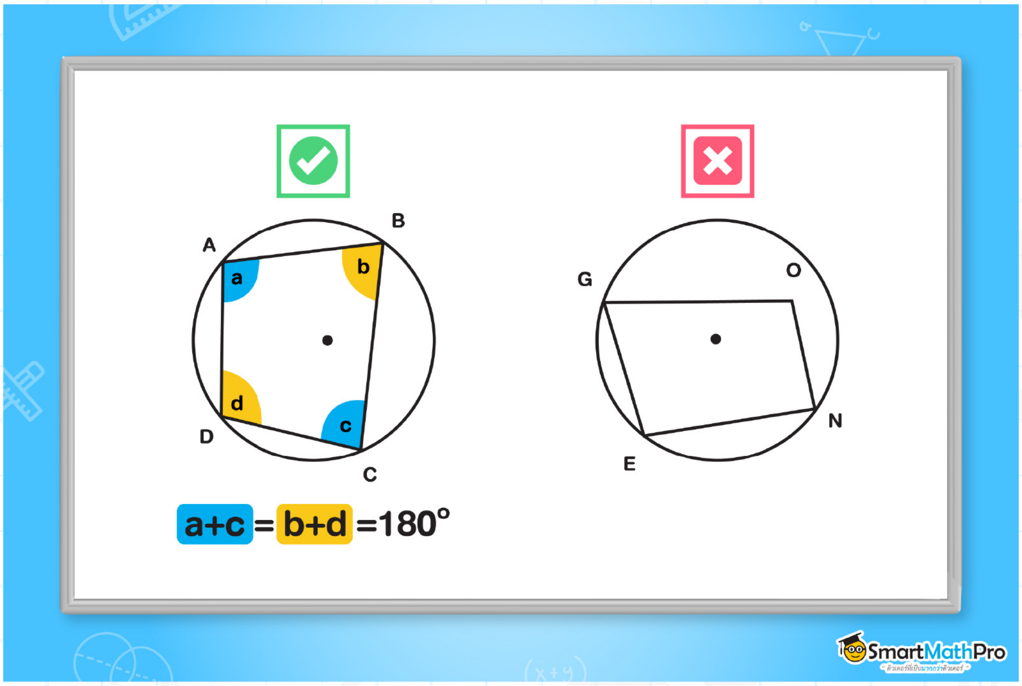


จากรูป $\overline{AB}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม โดยมี C เป็นจุดบนส่วนโค้งของวงกลม และ $A\hat{C}B$ เป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลม จะมีขนาดเท่ากับ 90°

ถ้ารูปสามเหลี่ยม ABC ที่แนบอยู่ด้านในของวงกลมมี $\overline{AB}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม ไม่ว่าเราจะเลื่อนจุด C ไปบนส่วนโค้งของวงกลมที่ใดก็ตามที่ไม่ทับกับจุด A และ จุด B รูปสามเหลี่ยมที่ได้จะแบนหรือใหญ่แค่ไหน มุม C ก็จะเป็นมุมฉากเสมอ

ทฤษฎีบทวงกลมที่ 4

ถ้ารูปสี่เหลี่ยมใด ๆ เป็นรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม แล้วผลบวกของขนาดของมุมตรงข้าม จะเท่ากับ 180 องศาหรือสองมุมฉาก



จากรูปด้านซ้าย จะเห็นว่าจุด A, B, C, และ D เป็นจุดบนส่วนโค้งของวงกลม จะเห็นว่ารูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่แนบอยู่ด้านในของวงกลม ซึ่งมีมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมเป็น a, b, c, d

ถ้ามุม A อยู่ตรงข้ามกับมุม C แล้วผลบวกของ A กับ c จะเท่ากับ 180 องศา ในทำนองเดียวกัน ถ้ามุม B อยู่ตรงข้ามกับมุม D แล้วผลบวกของ B กับ D จะเท่ากับ 180 องศา

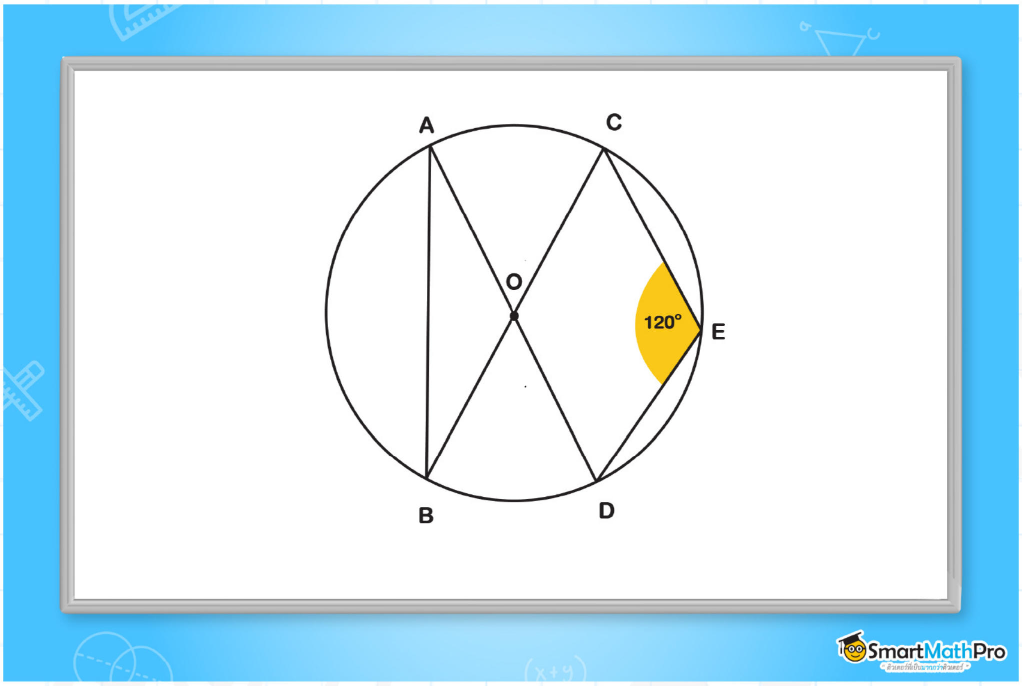
ข้อควรระวัง

จากรูปด้านขวาข้างต้น จุด O ไม่ได้ อยู่บนส่วนโค้งของวงกลม
ดังนั้น รูปสี่เหลี่ยม $GONE$ ไม่เรียกว่าเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่แนบอยู่ในวงกลมน้า

SmartMathPro

ตัวอย่างที่ 1

จากรูป กำหนดให้ $\overline{AD}$ และ $\overline{BC}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม O และ $C\hat{E}D = 120^\circ$ จงหาขนาดของ $A\hat{B}C$



วิธีทำ จาก **ทฤษฎีบทที่ 1** ในวงกลมเดียวกัน มุมที่จุดศูนย์กลางจะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่

รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันและ $C\hat{E}D = 120^\circ$

จะได้ว่า มุมกลับ $COD = 240^\circ$

จาก วงกลมมีขนาดมุมที่จุดศูนย์กลางรวมกันเป็น 360°

ดังนั้น $C\hat{O}D = 360 - 240 = 120^\circ$

จาก $A\hat{O}B$ และ $C\hat{O}D$ มุมตรงข้ามจะมีขนาดเท่ากัน

จะได้ว่า $A\hat{O}B = C\hat{O}D$

และ $\overline{AO}, \overline{BO}$ เป็นรัศมีของวงกลมเดียวกัน

จะได้ว่า $\overline{AO} = \overline{BO}$

ดังนั้น ΔAOB เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

จาก ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันได้ 180° และมุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วทั้งสองมุมมีขนาดเท่ากัน

จะได้ว่า $A\hat{B}C = \dfrac{180-120}{2} = 30^\circ$

ตอบ 30°

SmartMathPro

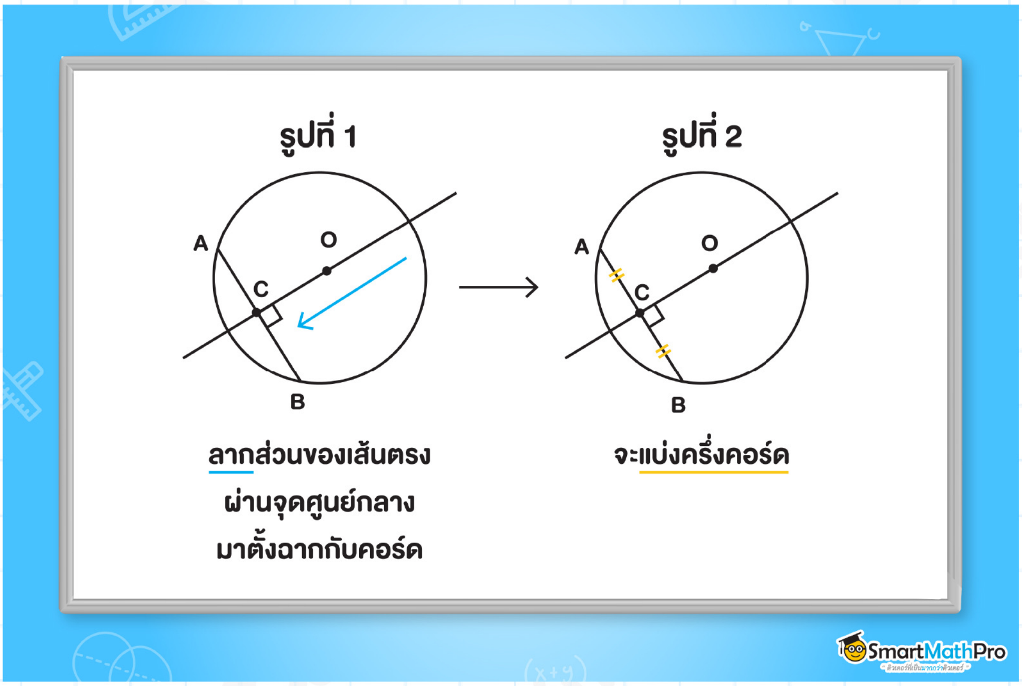
คอร์ดของวงกลม

ทฤษฎีบทวงกลมที่ 5

ส่วนของเส้นตรงซึ่งผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม และตัดกับคอร์ดที่ไม่ใช่เส้นผ่านศูนย์กลางจะมีสมบัติดังนี้

1. ถ้าส่วนของเส้นตรงแบ่งครึ่งคอร์ด แล้วส่วนของเส้นตรงนั้นจะตั้งฉากกับคอร์ด
2. ถ้าส่วนของเส้นตรงตั้งฉากกับคอร์ด แล้วส่วนของเส้นตรงนั้นจะแบ่งครึ่งคอร์ด

จากทฤษฎีบทที่ 5 จะเห็นว่า ข้อที่ 1. และข้อที่ 2. เปรียบเสมือนขาไปและขากลับซึ่งกันและกัน แสดงว่าประโยคนี้เป็นจริง ทั้งขาไปและขากลับ นั่นเอง หรือสามารถกล่าวเพิ่มได้อีกว่า เส้นตรงที่ตั้งฉากและแบ่งครึ่งคอร์ดของวงกลมจะผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมนั้น



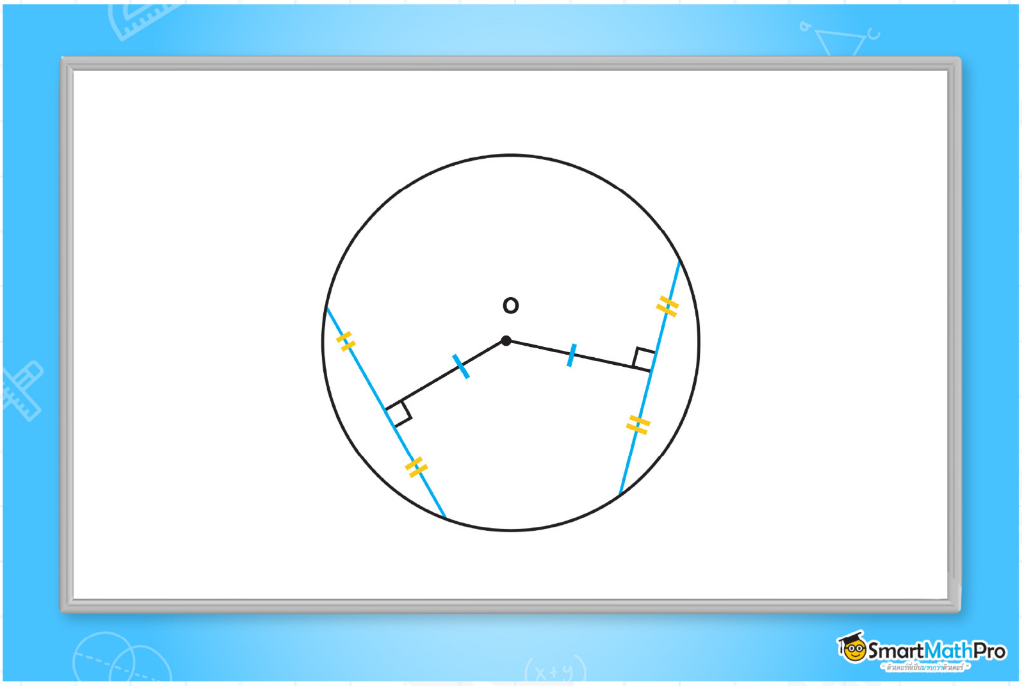
จากรูปที่ 1 เมื่อลากเส้นตรงผ่านจุด O มาตั้งฉาก $\overline{AB}$ ซึ่งเป็นคอร์ดของวงกลม O ที่จุด C จะทำให้ความยาวของ $\overline{AC}$ และ $\overline{BC}$ ยาวเท่ากัน (เป็นดังรูปที่ 2)

SmartMathPro

ทฤษฎีบทวงกลมที่ 6

ในวงกลมเดียวกัน ถ้าคอร์ดสองเส้นยาวเท่ากัน แล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางเป็นระยะเท่ากัน

ขากลับ คือ ในวงกลมเดียวกัน ถ้าคอร์ดสองเส้นอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางเป็นระยะเท่ากันแล้วคอร์ดทั้งสองนั้นจะยาวเท่ากัน ซึ่งทฤษฎีบทนี้ จะเป็นจริงทั้งขาไปและขากลับ

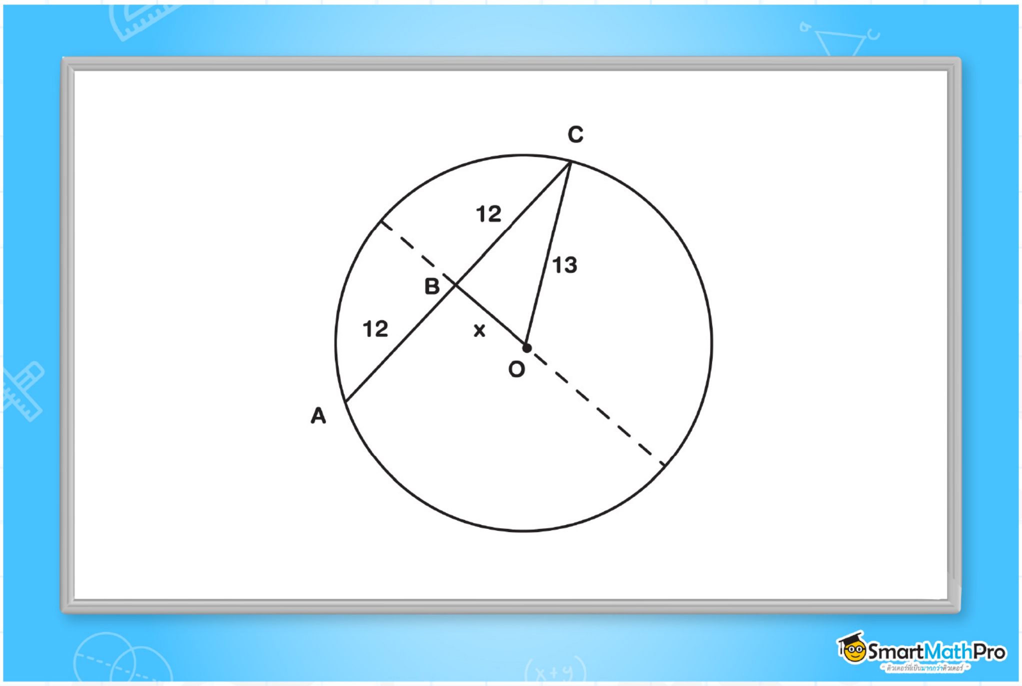


จากรูป น้อง ๆ อาจเริ่มสังเกตจากความยาวของคอร์ดทั้งสองเส้นในวงกลมมีความยาวเท่ากัน เลยทำให้ระยะห่างระหว่างจุด O (จุดศูนย์กลาง) กับคอร์ดเส้นทางซ้าย และระยะห่างระหว่างจุด O (จุดศูนย์กลาง) กับคอร์ดเส้นทางขวาห่างเท่ากัน

ในทางกลับกัน ถ้าเริ่มสังเกตจากระยะห่างระหว่างจุด O (จุดศูนย์กลาง) กับคอร์ดเส้นทางซ้าย และระยะห่างระหว่างจุด O (จุดศูนย์กลาง) กับคอร์ดเส้นทางขวาห่างเท่ากัน เลยทำให้ความยาวของความยาวของคอร์ดทั้งสองเส้นในวงกลมนี้ยาวเท่ากันนั่นเอง

ตัวอย่างที่ 2

จากวงกลม O ที่กำหนดให้ จงหาค่าของ x



วิธีทำ จาก **ทฤษฎีบทที่ 5** ส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางมาแบ่งครึ่งคอร์ดจะตั้งฉากกับคอร์ด

จะได้ว่า $C\hat{B}O = 90^\circ$

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้

$$BO^2 + BC^2 = CO^2$$

$$x^2 + 12^2 = 13^2$$

$$x^2 = 13^2 - 12^2$$

$$x^2 = 25$$

$$x = -5, 5$$

เนื่องจาก x เป็นความยาวของ $\overline{BO}$

ดังนั้น $x = 5$

ตอบ $x = 5$

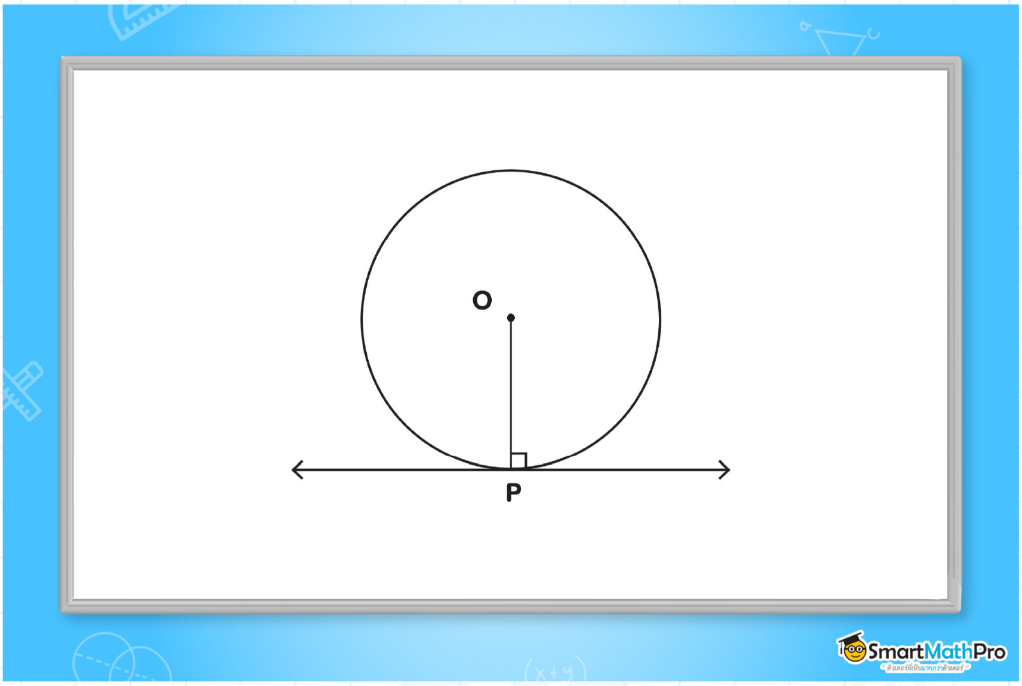
SmartMathPro

เส้นสัมผัสของวงกลม

มาถึงหัวข้อสุดท้ายกันแล้วนั่นก็คือเส้นสัมผัสวงกลมและรัศมีนั่นเอง ซึ่งหัวข้อนี้มีทฤษฎีบทที่น่าสนใจดังนี้

ทฤษฎีบทวงกลมที่ 7

เส้นสัมผัสวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส



ถ้าเราลากเส้นตรงไปสัมผัสกับวงกลม โดยที่จุด P เป็นจุดสัมผัสดังรูป เราจะเรียกเส้นตรงนั่นว่า เส้นสัมผัส และมุมที่เกิดจากเส้นสัมผัสและรัศมี $\overline{OP}$ จะเป็นมุมฉากเสมอ

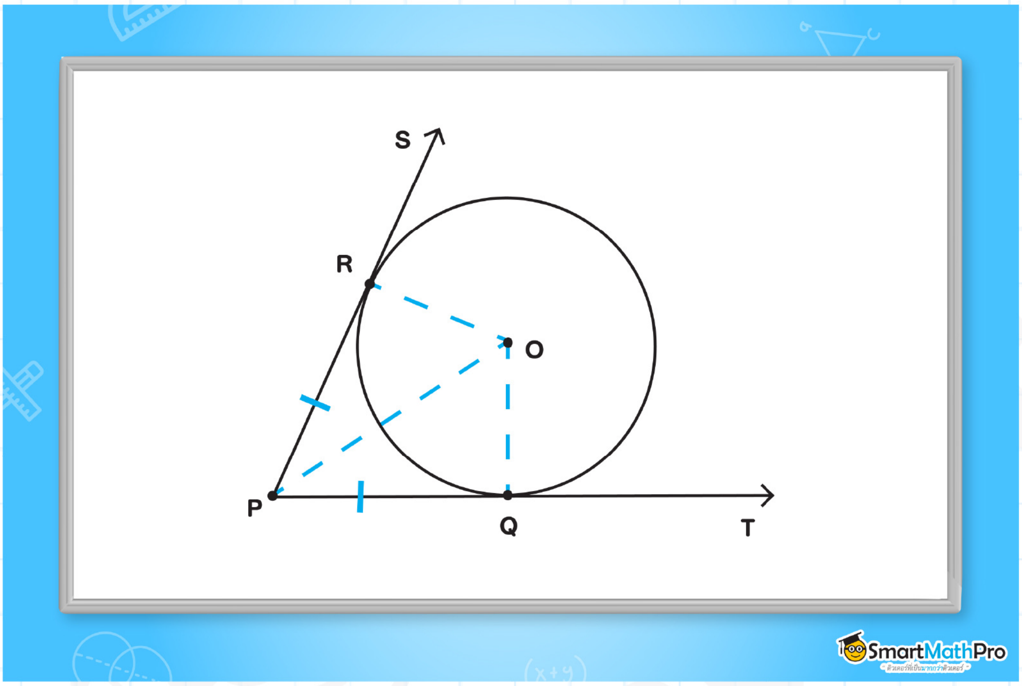
ลองสังเกตดูกันนะว่า เส้นสัมผัสจะตัดผ่านวงกลมเพียงแค่จุดเดียวซึ่งก็คือจุดสัมผัส
แต่เมื่อเราลากเส้นตรงเส้นหนึ่งผ่านวงกลมแล้วได้จุดตัด 2 จุด เราจะเรียกว่าเส้นตรงนั้นว่า เส้นตัด

น้อง ๆ บางคนอาจจะคิดว่าไม่สำคัญหรอก ทฤษฎีบทที่ 7 ก็แค่ทฤษฎีบทเล็ก ๆ แต่ที่จริง ๆ แล้ว เป็นทฤษฎีบทที่เจอได้ค่อนข้างบ่อย และยังสามารถใช้ได้ในระดับชั้น ม.ปลายด้วย

SmartMathPro

ทฤษฎีบทวงกลมที่ 8

ส่วนของเส้นตรง 2 เส้น ที่ลากจากจุดจุดหนึ่งภายนอกวงกลมมาสัมผัสวงกลมวงเดียวกันจะยาวเท่ากัน



กำหนดให้จุด P เป็นจุดที่อยู่นอกวงกลม ลากเส้นจากจุด P มาสัมผัสวงกลมที่จุด R และจุด Q จะได้

1. $P\hat{R}O = P\hat{Q}O = 90^\circ$ (จากทฤษฎีบทที่ 7 ที่ได้อธิบายไป)
2. $OP = OP$ (เป็นส่วนของเส้นตรงเดียวกัน)
3. $OR = OQ$ (เป็นรัศมีของวงกลม)

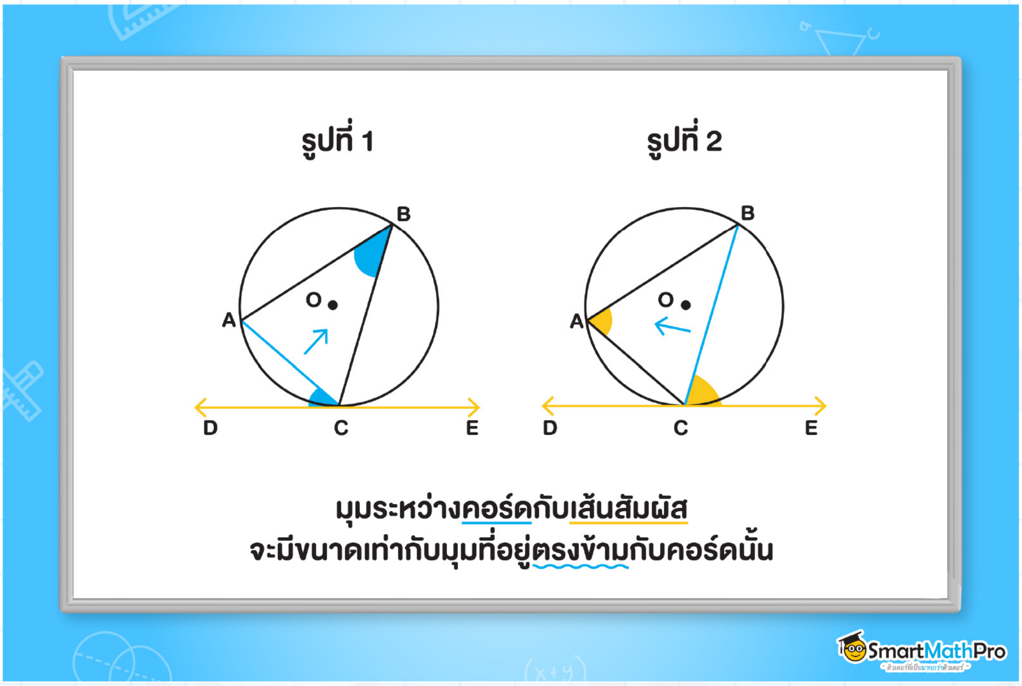
จากเหตุผลทั้ง 3 ข้อนี้ทำให้ ΔPOR และ ΔPOQ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการแบบฉาก - ด้าน - ด้านนั่นเอง เราจะได้ว่า $PR = PQ$ เพราะเป็นด้านที่สมนัยกันตามรูปและทฤษฎีบทข้างต้นเลย

ข้อควรระวัง

หากน้อง ๆ จะใช้ทฤษฎีบทนี้คือเส้นที่ลากจากจุดนอกวงกลมจะต้องเป็นเส้นสัมผัสวงกลมเท่านั้นนะ หากลากเส้นจากจุดนอกวงกลมผ่านวงกลมแล้วกลายเป็นเส้นตัดวงกลม (มีจุดตัด 2 จุด) จะไม่สามารถใช้ทฤษฎีบทนี้ได้

ทฤษฎีบทวงกลมที่ 9

มุมที่เกิดจากคอร์ดและเส้นสัมผัสวงกลมที่จุดสัมผัส จะมีขนาดเท่ากับขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับคอร์ดนั้น



ลองสังเกตรูปที่ 1 กัน จากรูปเนี่ยเราจะเห็นว่า $A\hat{C}D$ มีแขนของมุมข้างหนึ่งเป็นเส้นสัมผัสวงกลมที่ผ่านจุด C กับ $\overline{AC}$ ซึ่งเป็นคอร์ดของวงกลม O และมุมในส่วนโค้งที่อยู่ตรงข้ามคอร์ด $\overline{AC}$ ก็คือ $A\hat{B}C$ จากทฤษฎีบทกำลังจะบอกว่า $A\hat{C}D = A\hat{B}C$

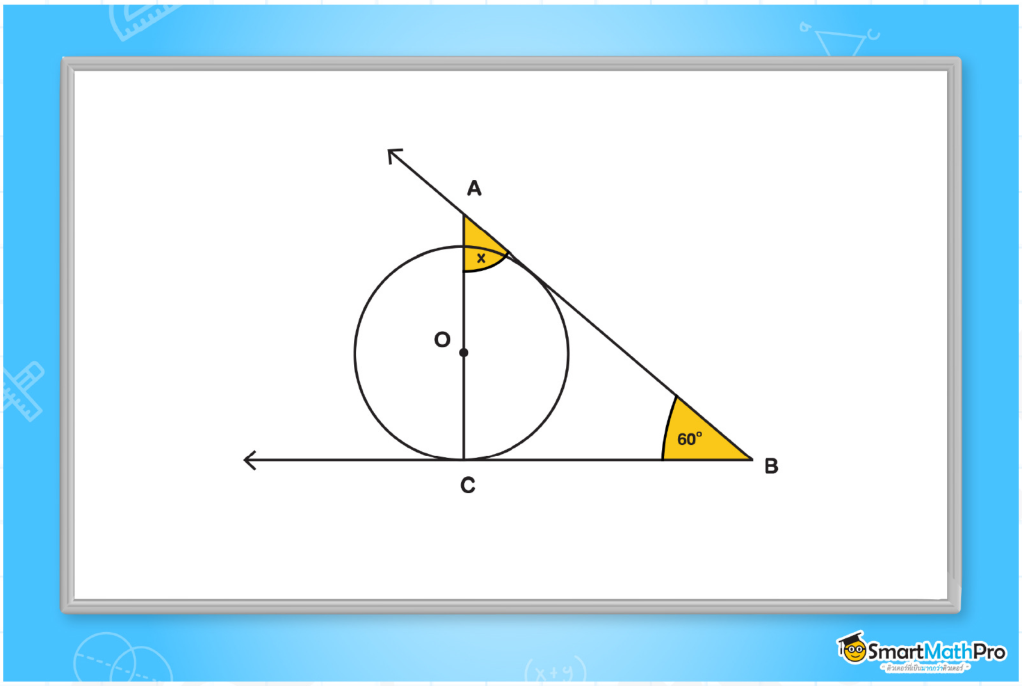
จากนั้นมาดูรูปที่ 2 จะได้ว่า $B\hat{C}E$ มีแขนของมุมข้างหนึ่งเป็นเส้นสัมผัสวงกลมที่ผ่านจุด C กับ $\overline{BC}$ ซึ่งเป็นคอร์ดของวงกลม O และมุมในส่วนโค้งที่อยู่ตรงข้ามคอร์ด $\overline{BC}$ ก็คือ $C\hat{A}B$ จากทฤษฎีบทกำลังจะบอกว่า $B\hat{C}E = C\hat{A}B$

ข้อสังเกต

ให้น้อง ๆ สังเกตคอร์ดตามภาพให้ดี ว่ามุมที่เราได้มาในตอนตอนติดกับคอร์ดเส้นใด จากนั้นอีกมุมหนึ่งที่มีขนาดเท่ากัน จะอยู่ตรงข้ามกับคอร์ดนั้น โดยสังเกตได้จากลูกศรที่พี่เขียนไว้ให้ในรูปข้างต้น

ตัวอย่างที่ 3

จากวงกลม O และเส้นสัมผัสที่กำหนดให้ จงหาค่าของ x



วิธีทำ

เนื่องจาก $\overrightarrow{BC}$ เป็นเส้นสัมผัส และ **ทฤษฎีบทที่ 7** เส้นสัมผัสวงกลมจะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมที่จุดสัมผัส

จะได้ $A\hat{C}B = 90^\circ$

จากผลรวมของขนาดของมุมภายในรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ 180°

จะได้ $C\hat{A}B = 180 - (90 + 60) = 30^\circ$

ตอบ $x = 30^\circ$

“เวลาที่ดีที่สุดในการเริ่มต้น คือ **ตอนนี้**”

- พี่ปั้น SmartMathPro -

สนใจติวคณิตศาสตร์เพิ่มเติม online.smartmathpro.com