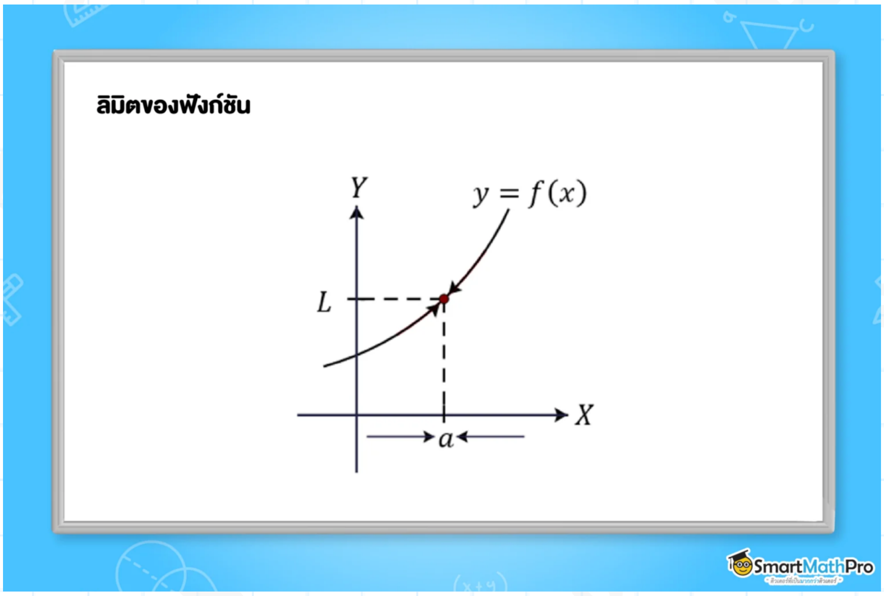
แคลคูลัส ม.6

ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ลิมิตของฟังก์ชัน

บทนิยาม

ถ้าค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L เมื่อ x เข้าใกล้ a
แล้วจะเรียก L **ว่าลิมิตของฟังก์ชัน** f ที่ a โดยใช้สัญลักษณ์ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$



จากรูปจะเห็นได้ว่า ตำแหน่ง $x = a$ สามารถเข้าใกล้ได้ทั้งสองด้าน คือซ้ายและขวา

- เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านซ้าย เขียนแทนด้วย $x \to a^-$
  ลิมิตซ้ายของ f ที่ a เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$
- เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านขวา เขียนแทนด้วย $x \to a^+$
  ลิมิตขวาของ f ที่ a เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

ในกรณีที่ $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ เราจะสามารถสรุปได้ว่า $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

และในกรณีที่ $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ จะได้ว่า f <u>ไม่</u>มีลิมิตที่ a หรือ $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ไม่มีค่า

ยิ่งไปกว่านั้น $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ <u>ไม่</u>จำเป็นว่า $f(a) = L$ เสมอไป

เราจะเห็นว่าการวาดกราฟเป็นวิธีพื้นฐานที่สามารถใช้หาลิมิตของฟังก์ชันได้

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชัน

ถ้า $\lim_{x \to a} f(x) = L$ และ $\lim_{x \to a} g(x) = M$ โดยที่ a เป็นจำนวนจริงแล้ว

- $\lim_{x \to a} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ
- $\lim_{x \to a} x^n = a^n$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$
- $\lim_{x \to a} cf(x) = cL$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ
- $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = L + M$
- $\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = L - M$
- $\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$
- $\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L}{M}$ เมื่อ $M \neq 0$
- $\lim_{x \to a} (f(x))^n = L^n$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$
- $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ เมื่อ $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, $\sqrt[n]{f(x)} \in \mathbb{R}$ สำหรับ x ที่เข้าใกล้ a และ $\sqrt[n]{L} \in \mathbb{R}$

เทคนิคการหาลิมิต

ในการหาลิมิตของฟังก์ชัน f เมื่อ x เข้าใกล้ a กราฟของฟังก์ชันบางอย่างอาจจะมีความซับซ้อนมากจนเกินไป จึงทำให้วาดได้ยาก ดังนั้นนอกจากการวิเคราะห์โดยใช้การวาดกราฟของฟังก์ชัน f แล้ว ยังมีอีกวิธีคือการแทนค่า a ลงในฟังก์ชัน f หรือหาค่าของ $f(a)$ บางครั้งการหาลิมิตของฟังก์ชันด้วยวิธีดังกล่าวอาจมีปัญหาได้ เช่น ได้ค่าที่ตัวส่วนเป็น 0 หรือเกิด $\frac{0}{0}$ น้อง ๆ สามารถใช้เทคนิคดังต่อไปนี้ในการแก้ปัญหาข้างต้นได้

- **วิธีที่ 1 ใช้การแยกตัวประกอบ**

ตัวอย่างที่ 1 จงหา $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$

แนวคิด ลองใช้วิธีการแทนค่า จะได้ $\frac{0}{0}$ แสดงว่า มีพจน์ที่ทำให้เกิด 0 ทั้งเศษและส่วน เมื่อลองแยกตัวประกอบ จะได้ว่า

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} &= \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

- วิธีที่ 2 คูณด้วยคอนจูเกต

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

แนวคิด ลองใช้วิธีแทนค่า จะได้ $\frac{0}{0}$ ในลักษณะแบบนี้ การแยกตัวประกอบอาจยากเกินไป ใช้การคูณด้วยคอนจูเกตช่วย

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} &= \lim_{x \to 1}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\right)\\ &= \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}\\ &= \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ ก็ต่อเมื่อ

- $f(a)$ หาค่าได้ (a ต้องอยู่ในโดเมนของ f)
- $\lim_{x \to a} f(x)$ มีค่า
- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

เราจะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, x \geq 2 \\ x + 3, x < 2 \end{cases}$

จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 2$ หรือไม่

วิธีทำ เมื่อพิจารณาที่ $x = 2$ จะต้องใช้ $f(x) = x^2 + 1$

จะได้ว่า $f(2) = 2^2 + 1 = 5$

พิจารณา $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ จะได้ว่า $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x + 3) = 2 + 3 = 5$

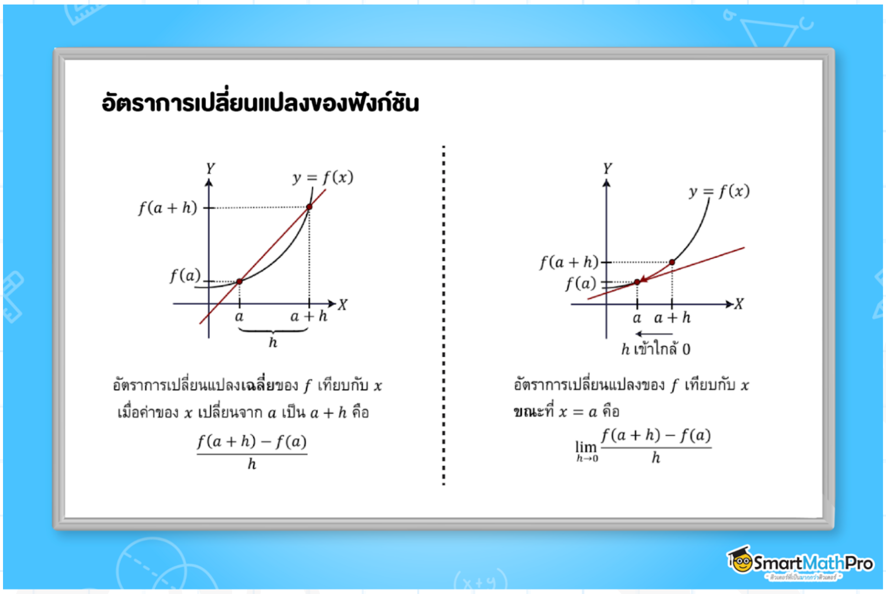
พิจารณา $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ จะได้ว่า $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^2 + 1) = 2^2 + 1 = 5$

ดังนั้น $\lim_{x \to 2} f(x) = 5 = f(2)$

เพราะฉะนั้นฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 2$

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

อัตราการเปลี่ยนแปลง



จากกราฟ จะเห็นว่า เมื่อ $x=a$ จะได้ค่าของฟังก์ชันคือ $f(a)$ และเมื่อ $x=a+h$ จะได้ค่าของฟังก์ชันคือ $f(a+h)$ จะได้ว่าเมื่อ x เปลี่ยนจาก a เป็น $a+h$

ค่าของฟังก์ชันจะเปลี่ยนไป $f(a+h)-f(a)$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f เทียบกับ x เมื่อค่าของ x เปลี่ยนจาก a เป็น $a+h$ จะเท่ากับ $\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

น้อง ๆ ลองสังเกตจากกราฟ เมื่อค่า h ยิ่งเข้าใกล้ 0 ค่าของ a และค่าของ $a+h$ จะมีความใกล้เคียงกันมากขึ้น

ดังนั้น เราจึงสามารถหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของ f เทียบกับ x ขณะที่ $x=a$ ได้จาก $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

บทนิยามของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

จากอัตราการเปลี่ยนแปลงของ f เทียบกับ x ขณะที่ $x=a$ คือ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ถ้าลิมิตนี้หาค่าได้ เราจะเรียกว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ a ดังบทนิยามต่อไปนี้

ให้ f เป็นฟังก์ชัน อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x เขียนแทนด้วย $f'(x)$ คือ

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

นอกจากสัญลักษณ์ $f'(x)$ ถ้า $f(x)=y$ แล้ว อนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x ยังสามารถเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\frac{dy}{dx}$

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร

สูตรการหาอนุพันธ์พื้นฐาน

กำหนดให้ a และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

- ถ้า $f(x) = c$ แล้ว $f'(x) = 0$
- ถ้า $f(x) = x^a$ แล้ว $f'(x) = ax^{a-1}$
- $(cf)'(x) = c \cdot f'(x)$
- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

จากสูตรการหาอนุพันธ์พื้นฐาน จะเห็นว่า การบวกและการลบ เราสามารถหาอนุพันธ์ทีละพจน์ได้ (การบวกและการลบกระจายได้) แต่การคูณและการหาร**ไม่**สามารถหาอนุพันธ์ทีละพจน์ได้ (การคูณและการหารกระจายไม่ได้น้า) ซึ่งการหาอนุพันธ์ผลคูณและผลหารมีสูตรเฉพาะ ดังนี้

สูตรการหาอนุพันธ์ผลคูณและผลหาร

- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ โดยที่ $g(x) \neq 0$

เพื่อให้เข้าใจมากขึ้น เราลองไปดูการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตรผ่านตัวอย่างกัน

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $h(x) = \left(x^2 + 1\right)(3x - 2)$ จงหา $h'(x)$

วิธีทำ $h'(x) = \left(x^2 + 1\right)'(3x - 2) + \left(x^2 + 1\right)(3x - 2)'$

$= (2x + 0)(3x - 2) + \left(x^2 + 1\right)(3 + 0)$

$= (2x)(3x - 2) + \left(x^2 + 1\right)(3)$

$= \left(6x^2 - 4x\right) + \left(3x^2 + 3\right)$

$= 9x^2 - 4x + 3$

อนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ

ฟังก์ชันประกอบ $g \circ f$ ก็สามารถหาอนุพันธ์ได้ โดยเราจะเรียกวิธีการหานี้ว่า กฎลูกโซ่ ซึ่งเราสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบได้จากสูตรนี้เลย

สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ $h(x) = (2x + 1)^5$ จงหา $h'(x)$

วิธีทำ กำหนดให้ $f(x) = 2x + 1$ และ $g(x) = x^5$

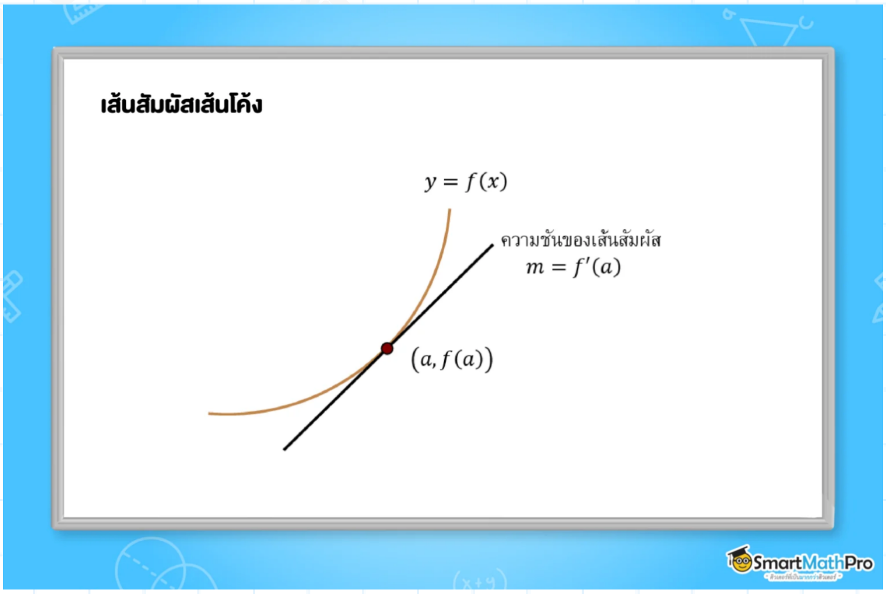
จะได้ $g(f(x)) = (2x + 1)^5$

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(f(x)) \cdot f'(x) \\ &= \left[(2x + 1)^5\right]' \cdot (2x + 1)' \\ &= 5(2x + 1)^4 \cdot (2 + 0) \\ &= 5(2x + 1)^4 \cdot 2 \\ &= 10(2x + 1)^4 \end{aligned}$$

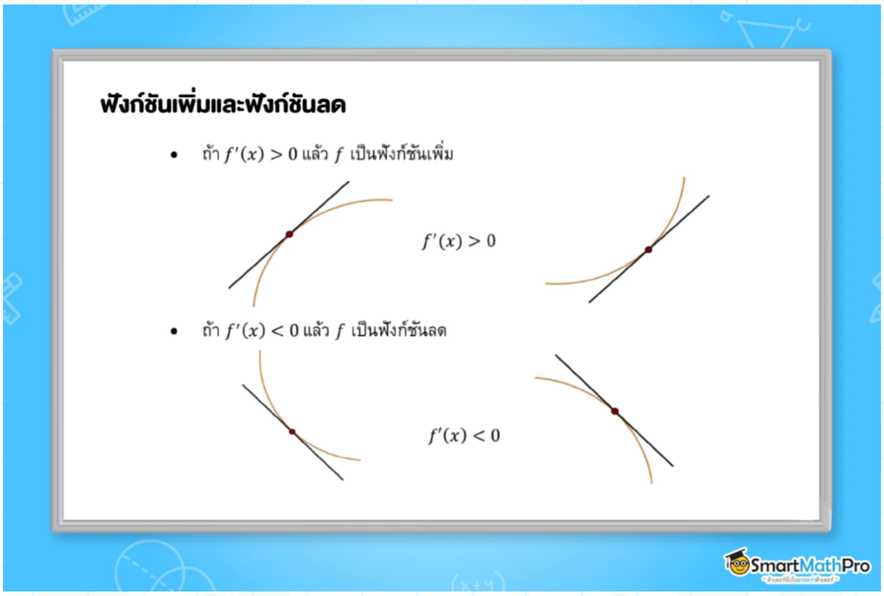
เส้นสัมผัสเส้นโค้ง

ให้เส้นโค้ง $y = f(x)$ และมีจุด $P(a,(f(a))$ อยู่บนเส้นโค้ง

- ความชันของเส้นสัมผัส คือ $f'(a)$
- สมการเส้นสัมผัส หาได้จากสูตรสมการเส้นตรง $y - y_1 = m(x - x_1)$ ที่ $m = f'(a)$ และผ่านจุด $P(a,(f(a))$ นั่นคือ $y - f(a) = f'(a)(x - a)$



ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด



จากรูปข้างต้น สังเกตได้ว่า

- ถ้าความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งมีค่าเป็นบวก $(f'(x) > 0)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม
- ถ้าความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งมีค่าเป็นลบ $(f'(x) < 0)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันลด

จุดวิกฤต ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

เราจะเรียก c ที่ทำให้ $f'(c) = 0$ หรือ $f'(c)$ ไม่มีค่า ว่า **ค่าวิกฤต** และเรียก $(c, (f(c))$ ว่า **จุดวิกฤต** โดยในหลักสูตร ม.ปลาย นี้ เราจะพิจารณาแต่ $f'(c) = 0$

ค่าสุดขีดสัมพัทธ์

วิธีการหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 หาค่าวิกฤตจากสมการ $f'(x) = 0$

ขั้นตอนที่ 2 วาดเส้นจำนวนเพื่อหาค่าสูงสุด–ต่ำสุดสัมพัทธ์

- ถ้าเปลี่ยนจาก + เป็น – แสดงว่าเป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ (ฟังก์ชันเพิ่มเปลี่ยนเป็นฟังก์ชันลด)
- ถ้าเปลี่ยนจาก – เป็น + แสดงว่าเป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ (ฟังก์ชันลดเปลี่ยนเป็นฟังก์ชันเพิ่ม)

ขั้นตอนที่ 3 สรุปคำตอบ

ตัวอย่างที่ 6 จงหาจุดสูงสุดและจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3$

วิธีทำ

ขั้นตอนที่ 1 หาค่าวิกฤตจากสมการ $f'(x) = 0$

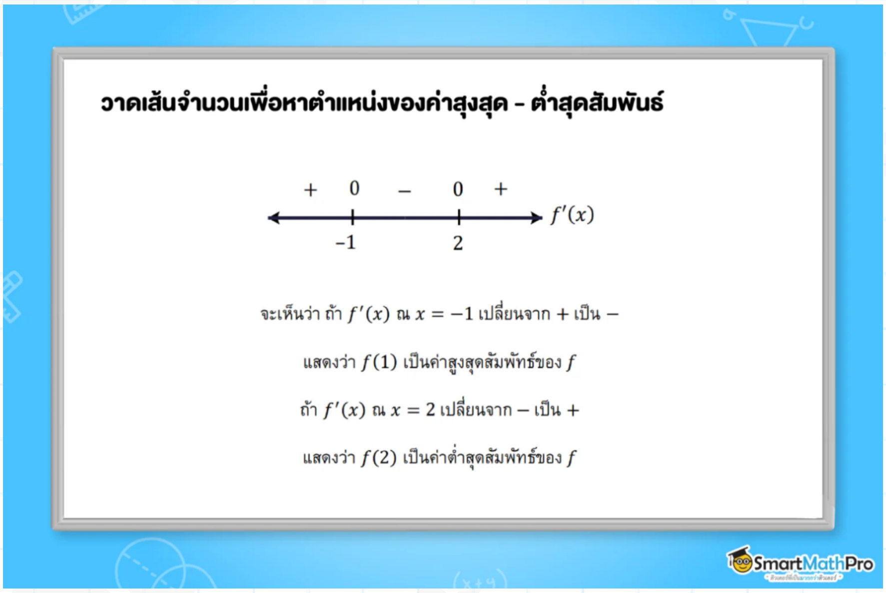
จาก $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 6x^2 - 6x - 12 \\
&= 6(x^2 - x - 2) \\
&= 6(x + 1)(x - 2)
\end{aligned}
$$

ถ้า $f'(x) = 0$ จะได้ $6(x+1)(x-2) = 0$

ดังนั้น $x = -1, 2$

ขั้นตอนที่ 2 วาดเส้นจำนวนเพื่อหาตำแหน่งของค่าสูงสุด-ต่ำสุดสัมพัทธ์



ขั้นตอนที่ 3 สรุปคำตอบ

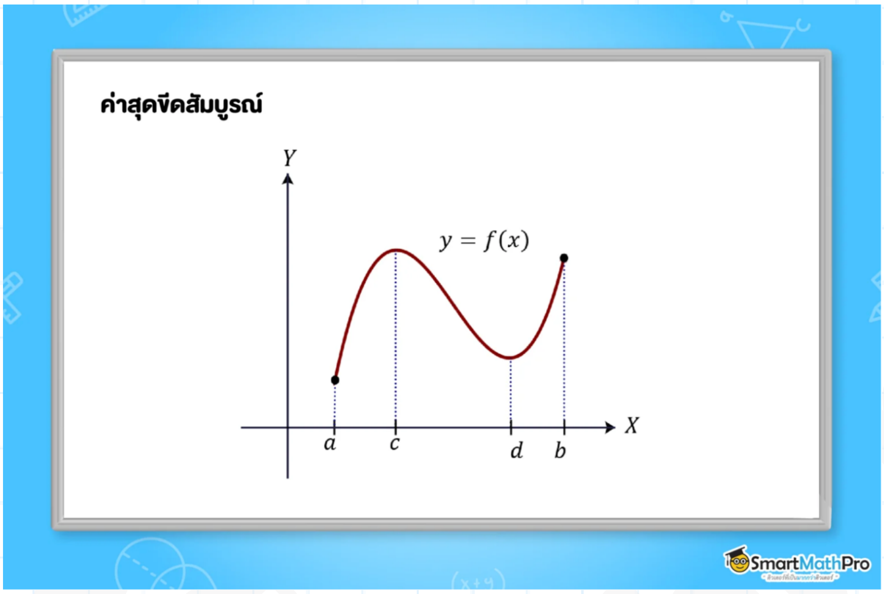
$f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 3 = 10$

$f(2) \quad = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 12(2) + 3 \quad = -17$

ดังนั้น จุดสูงสุดสัมพัทธ์ของ f คือ $(-1, 10)$ และจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f คือ $(2, -17)$

ค่าสุดขีดสัมบูรณ์

วิธีการหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์มีขั้นตอนดังต่อไปนี้



ขั้นตอนที่ 1 หาค่าวิกฤตจากสมการ $f'(x) = 0$

ขั้นตอนที่ 2 เช็กช่วงว่า ค่า x ที่ได้จากขั้นตอนที่ 1 อยู่ในช่วง $[a, b]$ หรือไม่ โดยเลือกเฉพาะค่าที่อยู่ในช่วง

ขั้นตอนที่ 3 นำขอบของช่วงนั้นก็คือ a และ b รวมไปถึงค่า x ที่ได้จากขั้นตอนที่ 2 มาแทนค่าในฟังก์ชันเริ่มต้นเพื่อหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์

ขั้นตอนที่ 4 สรุปคำตอบ (ค่าที่มากที่สุดเป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าที่น้อยที่สุดเป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์)

ตัวอย่างที่ 7 จงหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x^3 - 3x + 2$ บนช่วงปิด $[0, 2]$

วิธีทำ

ขั้นตอนที่ 1 หาค่าวิกฤตจากสมการ $f'(x) = 0$

จาก $f(x) = x^3 - 3x + 2$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x + 1)(x - 1)$$

ถ้า $f(x) = 0$ จะได้ $3(x + 1)(x - 1) = 0$

ดังนั้น $x = -1,1$

ขั้นตอนที่ 2 เช็กช่วง

$-1 \notin [0, 2]$ แสดงว่าจะพิจารณาที่ $x = 1$ เท่านั้น

ขั้นตอนที่ 3 นำขอบมาคิดด้วย

ขอบของ $[0, 2]$ คือ $x = 0, 2$

$f(0) = (0)^3 - 3(0) + 2 = 2$

$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 2 = 0$ (น้อยสุด)

$f(2) = (2)^3 - 3(2) + 2 = 4$ (มากสุด)

ขั้นตอนที่ 4 สรุปคำตอบ

ดังนั้น ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f คือ 4 ที่ $x = 2$

และค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f คือ 0 ที่ $x = 1$

อนุพันธ์อันดับสูง

จากหัวข้อที่แล้วเราได้เรียนรู้เรื่องการหาอนุพันธ์ และถ้าเราสามารถนำฟังก์ชัน $f'(x)$ มาหาอนุพันธ์ต่อได้อีก เราจะเรียกฟังก์ชันที่เป็นอนุพันธ์ของ $f'(x)$ ว่าอนุพันธ์อันดับสูง

บทนิยาม

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ และอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ จะเรียกอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f' ที่ x ว่า**อนุพันธ์อันดับที่ 2 ของฟังก์ชัน f ที่ x** และเขียนแทนด้วย $f''(x)$

เราสามารถใช้สัญลักษณ์อื่น ๆ แทนอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของ f ที่ x ได้อีก เช่น y'', $\frac{d^2y}{dx^2}$ หรือ $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$

ตัวอย่างที่ 8 กำหนดให้ $f(x) = 6x^3 + 5x^2 + 4x + 3$ จงหา $f''(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = 6x^3 + 5x^2 + 4x + 3$

จะได้ว่า $f'(x) = 18x^2 + 10x + 4$

ดังนั้น $f''(x) = 36x + 10$

ปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน

หัวข้อก่อนหน้าเราได้ศึกษาเกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันไปแล้ว ต่อไปเราจะศึกษากระบวนการที่กลับกัน นั่นคือการหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน เมื่อให้ f เป็นฟังก์ชัน เราจะหาฟังก์ชัน F ซึ่ง $F'(x) = f(x)$ และจะเรียกฟังก์ชัน F ว่า ปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f เช่น

$F(x) = 6x^2 + 5x$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 12x + 5$

แต่ปฏิยานุพันธ์ของ f ไม่ได้มีเพียงฟังก์ชันเดียวนะ ลองสังเกตฟังก์ชันต่อไปนี้ดู

$F_1(x) = 6x^2 + 5x$

$F_2(x) = 6x^2 + 5x + 1$

$F_3(x) = 6x^2 + 5x - 2$

น้อง ๆ น่าจะพอรู้แล้วว่าฟังก์ชันทั้งสามที่พี่ยกตัวอย่างมาล้วนเป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f ทั้งหมดเลย เพราะ $F'(x) = f(x)$

บทนิยาม

ให้ f เป็นฟังก์ชัน ถ้า F เป็นฟังก์ชันซึ่ง $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุก x ที่อยู่ในโดเมนของ f แล้วจะเรียก F ว่าเป็นปฏิยานุพันธ์หนึ่งของ f

จากตัวอย่างข้างต้น น้อง ๆ จะเห็นว่า ฟังก์ชันใด ๆ ที่อยู่ในรูป $F(x) = 6x^2 + 5x + c$ เมื่อเป็นค่าคงตัว จะเป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 12x + 5$ ทั้งหมดเลย

เราจะเขียนรูปทั่วไปของปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f ด้วยสัญลักษณ์ $\int f(x)dx$ เรียกว่า ปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปร x

การหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

สูตรสำหรับหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของบางฟังก์ชัน

กำหนดให้ a, k และ c เป็นจำนวนจริง

- $\int kdx = kx + c$
- $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$ เมื่อ $a \neq -1$
- $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$
- $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

การหาปริพันธ์จำกัดเขต

ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ ถ้า F เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

ตัวอย่างที่ 9 จงหา $\int_0^1 \left(3x^2 + 2x + 1\right)dx$

วิธีทำ จาก $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[0, 1]$

และปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

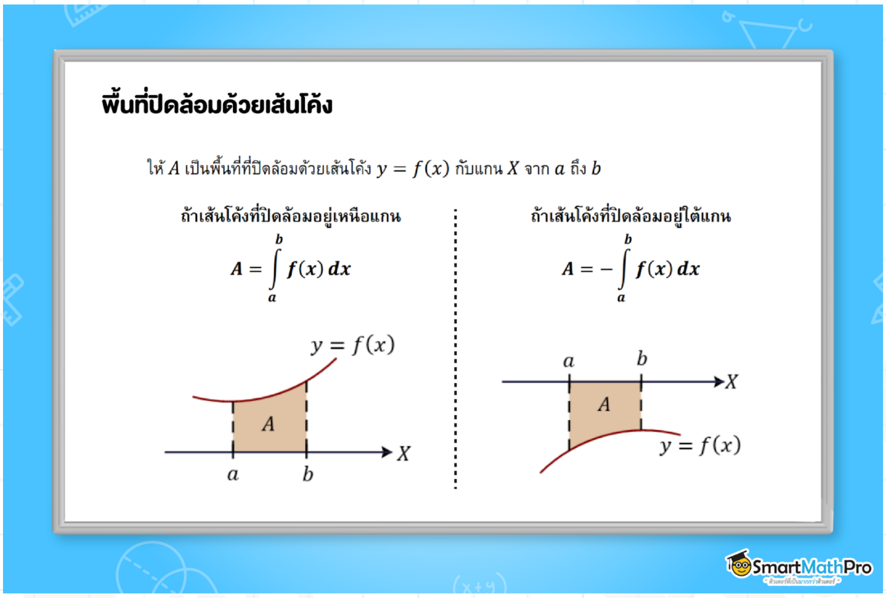
คือ $F(x) = \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + \frac{x^1}{1} + c = x^3 + x^2 + x + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(3x^2 + 2x + 1\right)dx &= \left(x^3 + x^2 + x + c\right)\Big|_0^1 \\ &= \left(1^3 + 1^2 + 1 + c\right) - \left(0^3 + 0^2 + 0 + c\right) \\ &= (3 + c) - (0 + c) \\ &= 3\end{aligned}$$

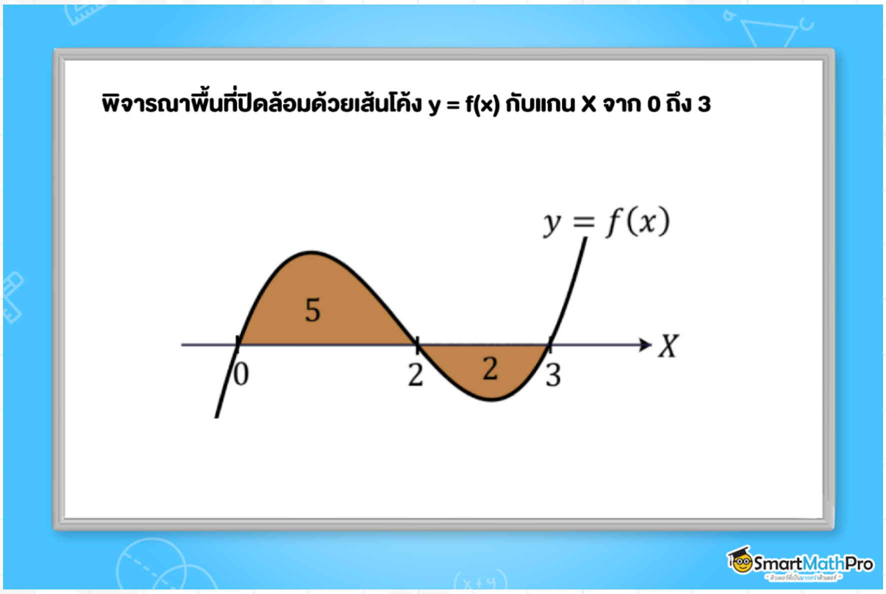
พื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

จากหัวข้อก่อนหน้า เราได้ศึกษาเกี่ยวกับปริพันธ์จำกัดเขตไปแล้ว โดยการเขียนปริพันธ์จำกัดเขตในรูป $\int_a^b f(x)dx$ คือพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ จาก a ถึง b เมื่อ $f(x) \geq 0$ สำหรับทุก $x \in [a, b]$

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาวิธีการหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ กับแกน X โดยแยกพิจารณาบนช่วงที่ $f(x) \geq 0$ (เส้นโค้งที่ปิดล้อมอยู่เหนือแกน X) และ $f(x) \leq 0$ (เส้นโค้งที่ปิดล้อมอยู่ใต้แกน X) ดังนี้



เช่น



พื้นที่ใต้กราฟในช่วง 0 ถึง 2 เท่ากับ 5 และ $\int_0^2 f(x)dx = 5$

พื้นที่ใต้กราฟในช่วง 2 ถึง 3 เท่ากับ 2 แต่ $\int_2^3 f(x)dx = -2$

ดังนั้น พื้นที่ใต้กราฟกับค่าอินทิเกรตไม่จำเป็นต้องเท่ากันเสมอไป

"เวลาที่ดีที่สุดในการเริ่มต้น คือ **ตอนนี้**"

- พี่ปั้น SmartMathPro -

สนใจติวคณิตศาสตร์เพิ่มเติม online.smartmathpro.com