

ตรีโกณมิติ ม.3

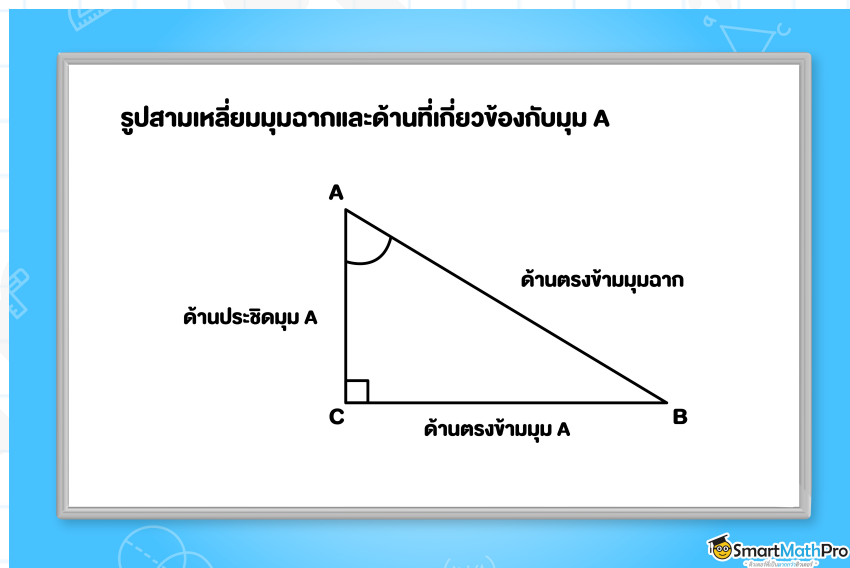
ความหมายของอัตราส่วนตรีโกณมิติ

หากลองย้อนกลับไปสมัยก่อน คนสนใจที่จะวัดความยาวของรูปสามเหลี่ยมชนิดต่าง ๆ จึงตั้งชื่อเล่นให้กับการวัดในลักษณะนี้ โดยกำหนดให้ชื่อนั้นมีที่มาจากคำว่า trigonon ที่แปลว่ารูปสามเหลี่ยม และ metron ที่แปลว่าการวัด รวมกันเป็นชื่อว่า trigonometry หรือ ตรีโกณมิติ นั่นเอง วันเวลาผ่านไป ความรู้เรื่องตรีโกณมิติถูกใช้อย่างแพร่หลายและเป็นที่ต้องการอย่างมาก จนกลายเป็นเรื่องที่ต้องเรียนในวิชาคณิตศาสตร์ไปแล้วนั่นเอง

รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จากที่เราได้รู้ความหมายไปแล้ว เราก็พอจะรู้แล้วว่าในบทนี้ เราจะสนใจรูปสามเหลี่ยมเป็นหลัก โดยรูปที่เราสนใจศึกษามากที่สุดในบทนี้ คือ รูปสามเหลี่ยมมุมฉากนั่นเอง เดี่ยวเราลองมาดูกันเลยยย

รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีมุมทั้งหมด 3 มุมแต่มี 1 มุมเป็นมุมฉาก ถ้าเราให้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มี C เป็นมุมฉาก เราจะเรียกแต่ละด้านดังต่อไปนี้



$\overline{AB}$ คือ ด้านตรงข้ามมุมฉาก (hypotenuse)

$\overline{BC}$ คือ ด้านตรงข้ามมุม A (the opposite side of angle A)

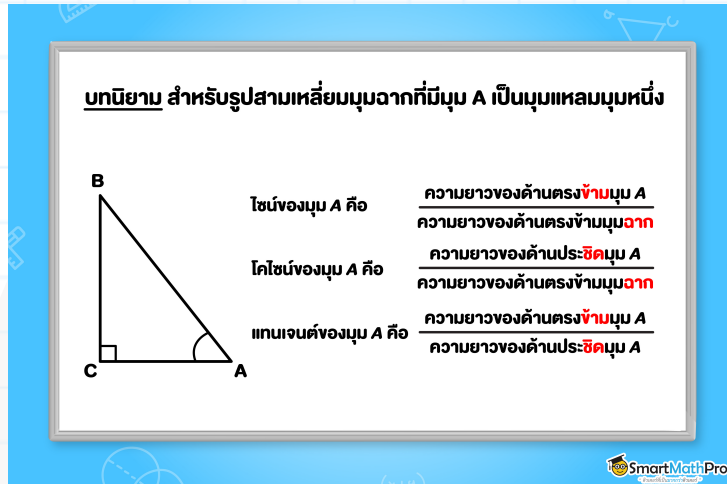
$\overline{AC}$ คือ ด้านประชิดมุม A (the adjacent side of angle A)

ข้อสังเกต ชื่อด้านที่เราเรียกตามรูปข้างต้นจะพิจารณาที่มุม A เป็นหลัก แต่ถ้าเปลี่ยนมาพิจารณามุม B เรายังมีชื่อเรียกของด้านเหล่านั้นเหมือนกัน โดย $\overline{AC}$ จะเป็นด้านตรงข้ามมุม B และ $\overline{BC}$ จะเป็นด้านประชิดมุม B นั่นเอง

อัตราส่วนตรีโกณมิติ

รูปสามเหลี่ยมมีองค์ประกอบที่สำคัญ คือ ด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมและมุมทั้ง 3 มุม ซึ่งต่อไป เราจะมาดูความสัมพันธ์ของแต่ละองค์ประกอบกันเลย

รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ซึ่งมี C เป็นมุมฉาก เมื่อเราพิจารณามุมหนึ่งที่ไม่ใช่มุมฉาก เช่น มุม A แล้วจะได้ว่า



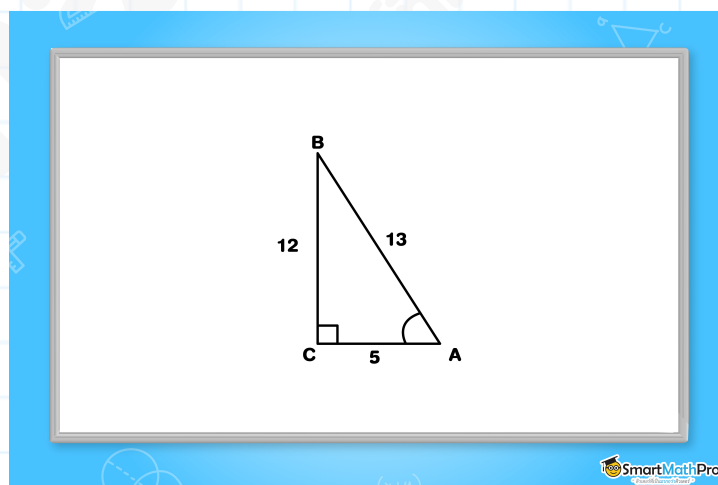
ไซน์ของมุม A , โคไซน์ของมุม A และแทนเจนต์ของมุม A เนี่ยแหละ เราจะเห็นว่ามันคือการเอาความยาวด้านแต่ละด้านมาเทียบกันเป็นคู่ ๆ เราเรียกมันว่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ ซึ่งอัตราส่วนตรีโกณมิติเดียวกันของมุมมุมหนึ่งเป็นค่าคงตัวค่าหนึ่งเสมอ และเราจะนิยมเขียน

$\sin A$ แทน ไซน์ของมุม A และอ่านว่า ซินัส A

$\cos A$ แทน โคไซน์ของมุม A และอ่านว่า คอส A

$\tan A$ แทน แทนเจนต์ของมุม A และอ่านว่า แทน A

ตัวอย่างที่ 1 จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้ จงหาค่า $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$, $\sin B$, $\cos B$, $\tan B$



จากรูปจะได้ว่า

$$\sin A = \frac{12}{13}$$

$$\sin B = \frac{5}{13}$$

$$\cos A = \frac{5}{13}$$

$$\cos B = \frac{12}{13}$$

$$\tan A = \frac{12}{5}$$

$$\tan B = \frac{5}{12}$$

อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาด 30 องศา, 45 องศา และ 60 องศา

จากหัวข้อก่อนหน้านี้เราได้รู้จักกับอัตราส่วนตรีโกณมิติไปแล้ว ซึ่งเรารู้ว่าอัตราส่วนตรีโกณมิติในมุมที่มีขนาดเท่ากันจะมีค่าเท่ากัน ซึ่งจริง ๆ แล้วขนาดของมุมในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากนั้นมีหลายมุมมากเลยนะ แต่ในระดับชั้น ม.3 เราจะโฟกัสแค่มุมแหลมที่มีขนาด 30° , 45° , 60°

สรุปค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาด 30° , 45° และ 60° ได้ดังนี้

อัตราส่วนตรีโกณมิติ	ขนาดของมุม A		
	30°	45°	60°
$\sin A$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan A$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

สมบัติ

สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ อัตราส่วนตรีโกณมิติเดียวกันของมุมที่มีขนาดเท่ากัน จะมีค่าเท่ากัน

ถ้าน้อง ๆ ยังจำค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติต่าง ๆ ของมุม 30° , 45° , 60° จากในตารางไม่ได้ พี่มีเทคนิควิธีจำค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติแบบเก๋ ๆ ของมุม 30° , 45° , 60° มาฝากกัน ยกมือซ้ายขึ้นมา แล้วลองไปดูกันว่าเทคนิคนี้มีวิธียังไงกันบ้าง

วิธีใช้เทคนิคมือ (ซ้าย)

เทคนิคการหาค่าของอัตราตรีโกณมิติด้วยมือ (ซ้าย)

$\sin A = \frac{\sqrt{\text{ซ้าย}}}{2}$

$\cos A = \frac{\sqrt{\text{ขวา}}}{2}$

$\tan A = \frac{\sqrt{\text{ซ้าย}}}{\sqrt{\text{ขวา}}}$

SmartMathPro

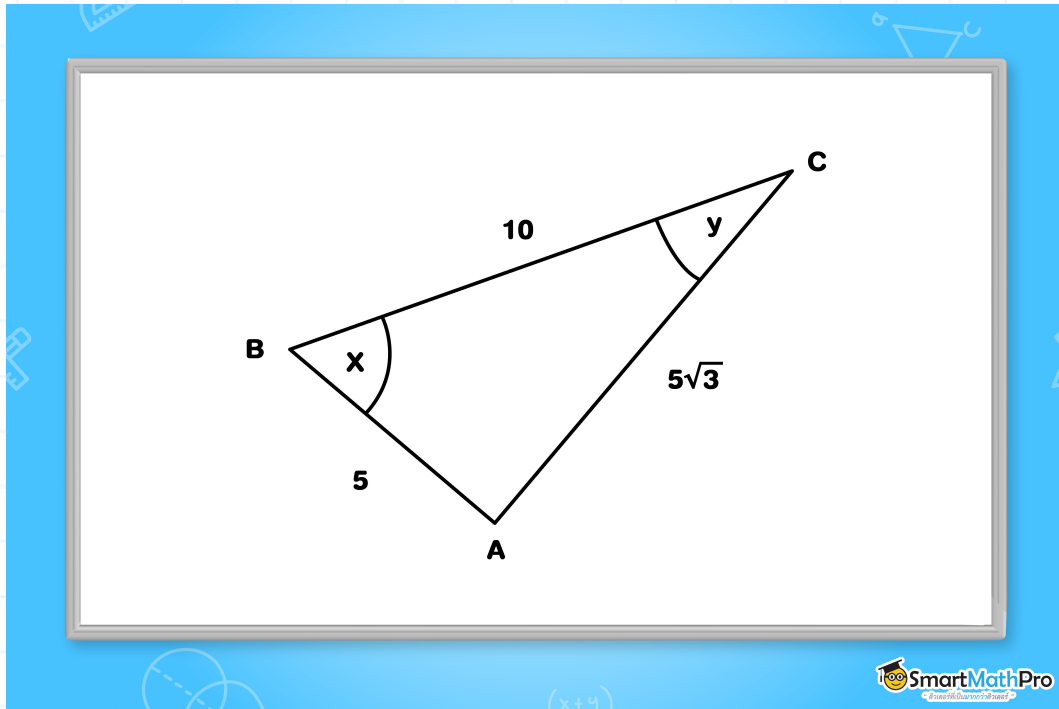
ขั้นตอนการหาค่าโดยใช้เทคนิคมือ (ซ้าย)

- เลือกมุมที่เราต้องการพิจารณา
- พับนิ้วลง ตามมุมในรูป เช่น ต้องการพิจารณามุม 30° ให้พับนิ้วชี้ลง
- การหาค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติ จะหาได้จากการนับจำนวนนิ้วจากด้านซ้ายหรือด้านขวาที่แตกต่างกัน

ลองใช้เทคนิคมือซ้ายในการหาค่า เช่น

- ต้องการหาค่า $\sin 60^\circ$
ให้พับนิ้วนางลง เหลือ 3 นิ้วทางด้านซ้าย เลยได้ว่าค่าของ $\sin 60^\circ$ มีค่าเท่ากับ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ต้องการหาค่า $\cos 45^\circ$
ให้พับนิ้วกลางลง เหลือ 2 นิ้วทางด้านขวา เลยได้ว่าค่าของ $\cos 45^\circ$ มีค่าเท่ากับ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
นั่นคือ $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ จะเห็นว่าได้ค่าเท่ากับตารางด้านบนเลย
- ต้องการหาค่า $\tan 60^\circ$
ให้พับนิ้วนางลง มี 3 นิ้วทางด้านซ้าย และ 1 นิ้วทางด้านขวา เลยได้ว่าค่าของ $\tan 60^\circ$ มีค่าเท่ากับ $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1}} = \sqrt{3}$

ตัวอย่างที่ 2 จากรูปสามเหลี่ยมต่อไปนี้ จงหาขนาดของมุม x และมุม y



แนวคิด เราจะมาพิจารณากันว่ารูปสามเหลี่ยมข้างต้นนี้ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่ ถ้าเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากจะใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติในการหาขนาดของมุมต่อไป

วิธีทำ

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส “กำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉาก”

จากรูปสามเหลี่ยม ABC จะได้ว่า $CB^2 = AB^2 + AC^2$

$$\text{แทนค่าได้ว่า } 10^2 = 5^2 + (5\sqrt{3})^2$$

$$100 = 25 + 75$$

$$100 = 100 \text{ ซึ่งเป็นจริง}$$

ดังนั้น รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่มีมุม A เป็นมุมฉาก

จากมุม x

$$\text{พิจารณา } \cos x = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\text{จาก } \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{ดังนั้น } x = 60^\circ$$

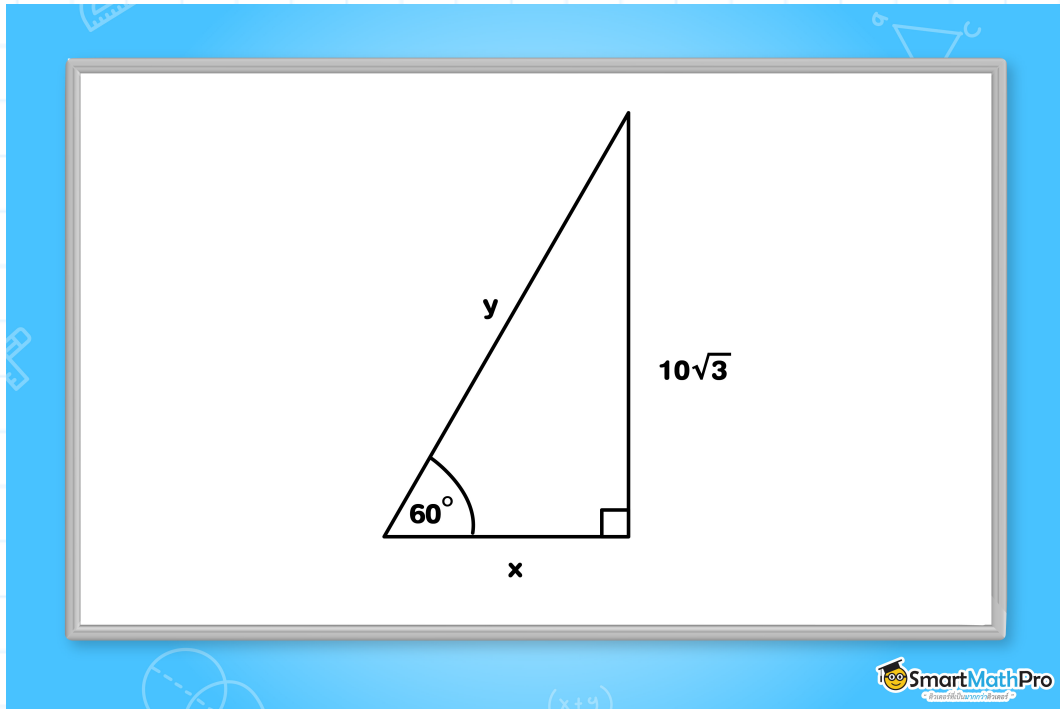
จากมุม y

$$\text{พิจารณา } \tan y = \frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{จาก } \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{ดังนั้น } y = 30^\circ$$

ตัวอย่างที่ 3 จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากต่อไปนี้ จงหาขนาดของมุม x และมุม y



วิธีทำ

จาก $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

จากรูป จะได้ว่า $\frac{10\sqrt{3}}{x} = \sqrt{3}$

$$10\sqrt{3} = x\sqrt{3}$$

$$x = 10$$

จากค่า $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

จากรูป จะได้ว่า $\frac{10\sqrt{3}}{y} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$(10\sqrt{3})(2) = y\sqrt{3}$$

$$20\sqrt{3} = y\sqrt{3}$$

$$y = 20$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลลัพธ์ของ $\sin 30^\circ + (\cos 45^\circ)^2$

วิธีทำ

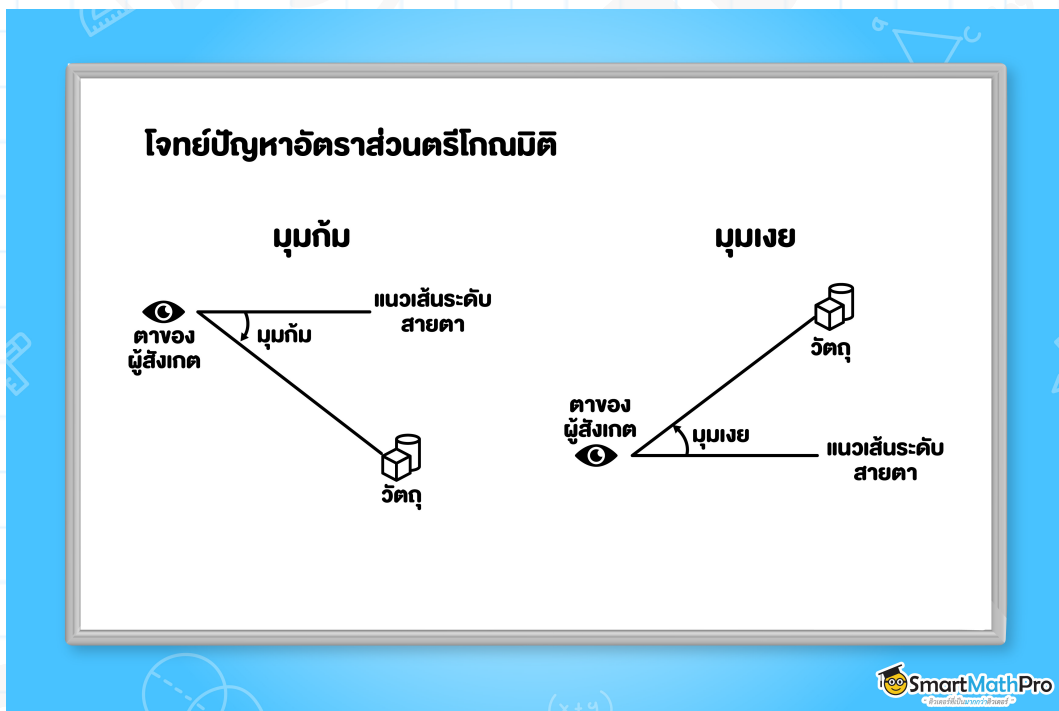
จาก $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

จะได้ว่า $\sin 30^\circ + (\cos 45^\circ)^2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

ดังนั้น $\sin 30^\circ + (\cos 45^\circ)^2 = 1$

โจทย์ปัญหาอัตราส่วนตรีโกณมิติ

ในการแก้โจทย์ที่ต้องใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ จำเป็นต้องทราบขนาดของมุมด้วยนะ และการแก้โจทย์ปัญหาในเรื่องนี้เราจะใช้มุมที่เกิดจากการมองด้วยสายตา ซึ่งมีคำที่ใช้ในการเรียกมุมที่ทำกับแนวเส้นระดับสายตา 2 แบบด้วยกัน คือ **มุมก้ม (angle of depression)** และ **มุมเงย (angle of elevation)**



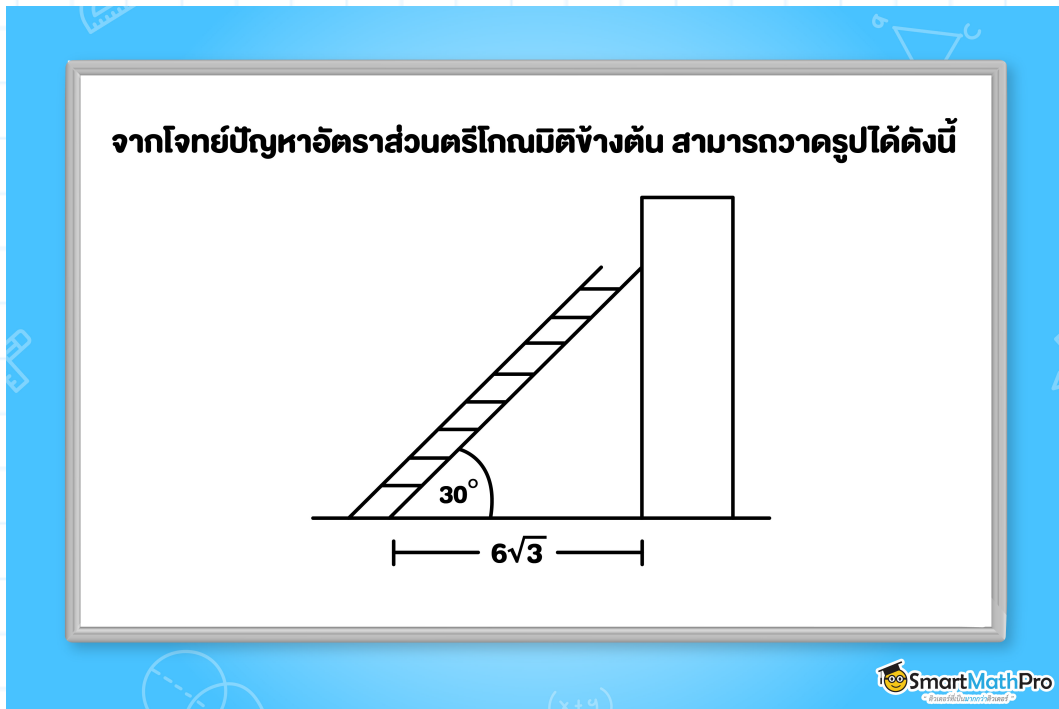
จากรูป จะเห็นได้ว่า

- มุมก้ม เป็นมุมที่เกิดจากการมองวัตถุที่อยู่ต่ำกว่าแนวเส้นระดับสายตา
- มุมเงย เป็นมุมที่เกิดจากการมองวัตถุที่อยู่สูงกว่าแนวเส้นระดับสายตา

เรามาดูตัวอย่างวิธีการใช้งาน โดยผ่านตัวอย่างนี้กัน

ตัวอย่างที่ 5 บันไดวางพาดกำแพงโดยทำมุม 30° กับพื้น ถ้าปลายอีกด้านของบันไดอยู่ห่างจากฐานกำแพงอยู่ $6\sqrt{3}$ เมตร แล้วบันไดยาวกี่เมตร

วิธีทำ



กำหนดให้ บันไดยาว x เมตร

จะได้ว่า $\cos 30^\circ = \frac{6\sqrt{3}}{x}$

จาก $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

จะได้ $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{x}$

$$x\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$

$$x = 12$$

ดังนั้น บันไดยาว 12 เมตร

“เวลาที่ดียิ่งที่สุดในการเริ่มต้น คือ ตอนนี้”

- พี่ปุ่น SmartMathPro -

สนใจติวคณิตศาสตร์เพิ่มเติม online.smartmathpro.com