จำนวนจริง ม.2

จำนวนจริงคืออะไร ?

ในทางคณิตศาสตร์ จำนวนจริงคือจำนวนที่สามารถเขียนแทนด้วยจุดบนเส้นจำนวนได้ และจุดใด ๆ แต่ละจุดบนเส้นจำนวนจะแทนจำนวนจริงจำนวนหนึ่ง ซึ่งอาจเป็นจำนวนตรรกยะหรือจำนวนอตรรกยะก็ได้ ดังนั้นเราจึงเรียกเส้นจำนวนนั้นว่า **เส้นจำนวนจริง (real number line หรือ real line)**

การบวกและการคูณของจำนวนจริง มีสมบัติที่สำคัญเช่นเดียวกับสมบัติการบวกและการคูณของจำนวนเต็มที่เราเคยมาแล้ว คือ สมบัติการสลับที่ สมบัติการเปลี่ยนหมู่ สมบัติการแจกแจง สมบัติของหนึ่งและศูนย์

จำนวนที่เป็นจำนวนตรรกยะหรือจำนวนอตรรกยะ เรียกรวมกันว่า **จำนวนจริง (Real Number)**

จำนวนตรรกยะ

จากที่เราได้รู้แล้วว่าจำนวนจริงคือจำนวนตรรกยะหรือจำนวนอตรรกยะ พี่จะพาน้องมารู้จักจำนวนตรรกยะก่อนเลย ซึ่งจำนวนตรรกยะมีนิยามดังนี้

<u>บทนิยาม</u>

จำนวนตรรกยะ คือ จำนวนที่เขียนแทนได้ด้วยเศษส่วน $\frac{a}{b}$
เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ $b \neq 0$

<u>ตัวอย่างของจำนวนตรรกยะ</u>

- **จำนวนตรรกยะที่เป็นจำนวนเต็ม** ได้แก่
  - จำนวนเต็มบวก เช่น $1, 25, 148, 1059, 20578$
  - จำนวนเต็มลบ เช่น $-1, -30, -157, -5490, -100000$
  - ศูนย์ (0)

- **จำนวนตรรกยะที่อยู่ในรูปของเศษส่วน** เช่น $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{3}{4}, \frac{2}{9}, \frac{5}{11}, \frac{7}{12}, \frac{9}{20}, \frac{7}{40}, \frac{11}{25}$

เรายังสามารถเขียนเศษส่วนให้อยู่ในรูปของทศนิยมซ้ำได้อีกด้วย ได้แก่

- $\frac{11}{25} = 0.44000... = 0.44$ (ทศนิยมซ้ำศูนย์)
- $\frac{5}{11} = 0.454545... = 0.\dot{4}\dot{5}$ (ทศนิยมไม่ซ้ำศูนย์)

SmartMathPro
" ติวเตอร์ที่เป็นมากกว่าติวเตอร์ "

จำนวนอตรรกยะ

ในระบบจำนวนจริงอาจมีบางจำนวนที่ไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเศษส่วนหรือทศนิยมซ้ำได้ เราจึงเรียกจำนวนเหล่านี้ว่าจำนวนอตรรกยะนั่นเอง

บทนิยาม

จำนวนอตรรกยะ คือ จำนวนที่ไม่สามารถเขียนแทนได้ด้วยทศนิยมซ้ำหรือเศษส่วน $\frac{a}{b}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ $b \neq 0$ ได้

ตัวอย่างของจำนวนอตรรกยะ

- จำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์ เช่น $\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$
- ทศนิยมไม่รู้จบแบบไม่ซ้ำ เช่น $0.19478...$, $51.1245...$, $697.215486...$
- ค่าคงที่ทางคณิตศาสตร์บางค่า เช่น π

ตัวอย่างที่ 1 จงพิจารณาว่าจำนวนที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นจำนวนตรรกยะหรือจำนวนอตรรกยะ

1) $\sqrt{5}$

ตอบ เป็นจำนวนอตรรกยะ เพราะ $\sqrt{5} = 2.236067...$ เป็นทศนิยมไม่รู้จบแบบไม่ซ้ำไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วนได้

2) $\frac{22}{7}$

ตอบ เป็นจำนวนตรรกยะ เพราะ $\frac{22}{7}$ เป็นจำนวนที่อยู่ในรูปของเศษส่วน

3) $5.231231213312...$

ตอบ เป็นจำนวนอตรรกยะ เพราะ $5.231231213312...$ เป็นทศนิยมไม่รู้จบแบบไม่ซ้ำจึงไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วนได้

4) $-1.2343434...$

ตอบ เป็นจำนวนตรรกยะ เพราะ $-1.2343434...$ เป็นทศนิยมซ้ำซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วนได้

5) $2\frac{3}{5}$

ตอบ เป็นจำนวนตรรกยะ เพราะ $2\frac{3}{5} = \frac{13}{5}$ เป็นจำนวนที่อยู่ในรูปของเศษส่วน

SmartMathPro
" ติวเตอร์ที่เป็นมากกว่าติวเตอร์ "

ตัวอย่างที่ 2 จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือเป็นเท็จ

1) จำนวนที่ไม่ได้เขียนในรูปเศษส่วนที่เป็นจำนวนเต็มส่วนด้วยจำนวนเต็ม ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ

ตอบ เป็นจริง เพราะจำนวนที่ไม่สามารถเขียนในรูปเศษส่วนที่เป็นจำนวนเต็มส่วนด้วยจำนวนเต็ม คือจำนวนอตรรกยะนั่นเอง

2) จำนวนอตรรกยะสามารถแทนได้ด้วยจุดบนเส้นจำนวน

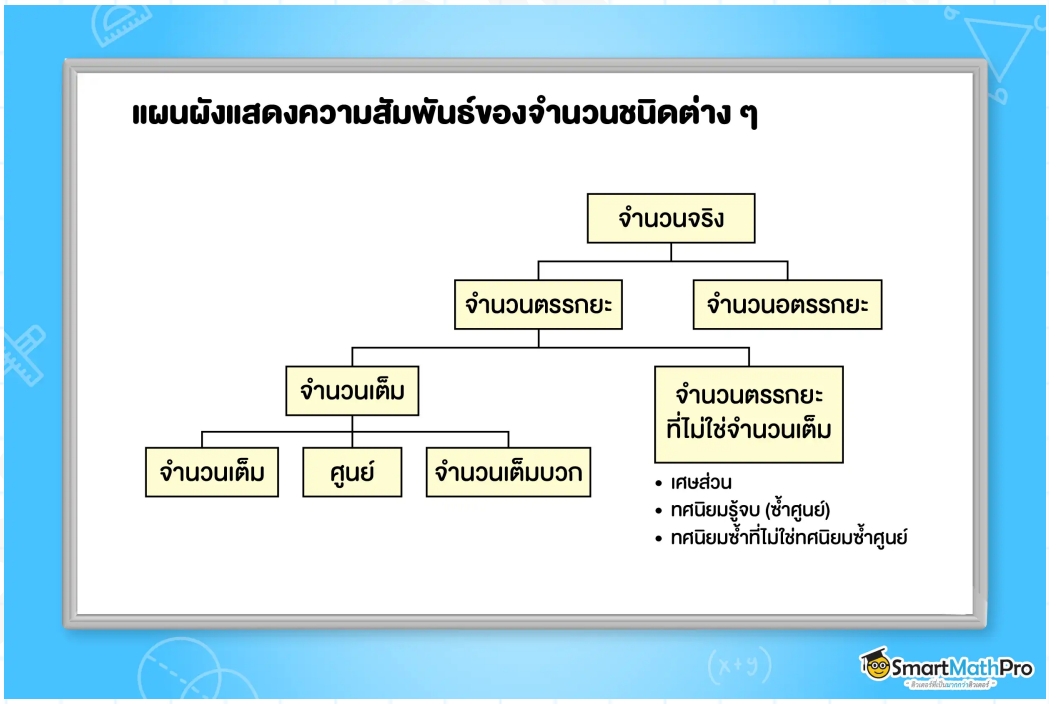
ตอบ เป็นจริง เพราะจำนวนอตรรกยะเป็นส่วนหนึ่งของจำนวนจริงซึ่งสามารถเขียนแทนด้วยจุดบนเส้นจำนวนได้

3) สามารถบอกได้ว่าระหว่าง 1 และ 3 มีจำนวนตรรกยะกี่จำนวน

ตอบ เป็นเท็จ เพราะจำนวนตรรกยะไม่ได้มีจำนวนเต็มเพียงอย่างเดียว ยังมีจำนวนที่อยู่ในรูปเศษส่วนหรือทศนิยมซ้ำอีกซึ่งไม่สามารถนับจำนวนได้

4) ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เท่ากับศูนย์ แล้วทั้ง $\frac{a}{b}$ และ $\frac{b}{a}$ ต่างก็เป็นจำนวนตรรกยะ

ตอบ เป็นจริง เพราะทั้ง $\frac{a}{b}$ และ $\frac{b}{a}$ ต่างก็เป็นเศษส่วนที่ตัวส่วนไม่เท่ากับศูนย์นั่นเอง



SmartMathPro

รากที่สอง

ความหมายของรากที่สอง

รากที่สองของจำนวนจริงใด ๆ จะมีบทนิยามดังนี้

บทนิยาม

ให้ a แทนจำนวนจริงใด ๆ ที่ไม่เป็นลบ
รากที่สอง (square root) ของ a คือ จำนวนจริงที่ยกกำลังสองแล้วได้ a

หมายเหตุ : สำหรับรากที่สองของจำนวนจริงลบจะยังไม่กล่าวถึง เนื่องจากไม่มีจำนวนจริงใดที่ยกกำลังสองแล้วได้จำนวนจริงลบ

เราสามารถหารากที่สองของจำนวนจริงบวกใด ๆ โดยใช้บทนิยามได้ดังนี้

- 2 เป็นรากที่สองของ 4 เพราะว่า $2^2 = 4$
- -2 เป็นรากที่สองของ 4 เพราะว่า $(-2)^2 = 4$
- 4 เป็นรากที่สองของ 16 เพราะว่า $4^2 = 16$
- -4 เป็นรากที่สองของ 16 เพราะว่า $(-4)^2 = 4$

หรือเราอาจกล่าวได้ว่ารากที่สองของ 4 ได้แก่ $2, -2$ และรากที่สองของ 16 ได้แก่ $4, -4$
น้อง ๆ จะเห็นว่าถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก รากที่สองของ a มีสองรากคือ รากที่เป็นบวกซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sqrt{a}$ และรากที่เป็นลบซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $-\sqrt{a}$

มุมความรู้

กรณฑ์ที่สองคือรากที่สองที่เป็นบวก ดังนั้นกรณฑ์ที่สองจะมีเพียงหนึ่งคำตอบเท่านั้น และใช้สัญลักษณ์ $\sqrt{\ }$ ตัวอย่างเช่น กรณฑ์ที่สองของ 25 หรือ $\sqrt{25}$ มีค่าเท่ากับ 5 ส่วนรากที่สองของ 25 ได้แก่ $\sqrt{25} = 5$ และ $-\sqrt{25} = -5$

SmartMathPro
" ติวเตอร์ที่เป็นมากกว่าติวเตอร์ "

การหารากที่สอง

การหารากที่สองของจำนวนจริงสามารถทำได้หลายวิธี โดยชั้น ม.2 เราจะเน้นการหารากที่สองโดยการแยกตัวประกอบเท่านั้น ส่วนวิธีอื่น ๆ จะได้เรียนในระดับชั้นที่สูงกว่านี้

ตัวอย่างที่ 3 จงหารากที่สองของจำนวนต่อไปนี้

1) 1225

วิธีทำ จาก $1225 = 5 \times 5 \times 7 \times 7$

$$= (5 \times 7)^2$$

$$= 35^2$$

ดังนั้น รากที่สองของ 1225 คือ 35 และ -35

2) 900

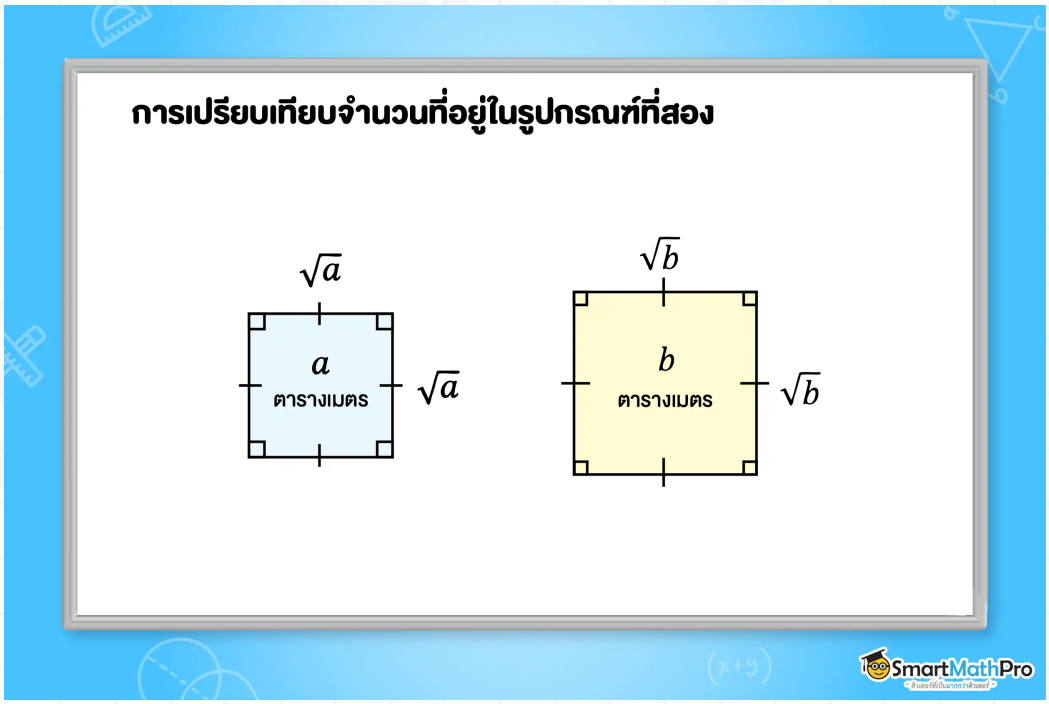
วิธีทำ จาก $900 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$

$$= (2 \times 3 \times 5)^2$$

$$= 30^2$$

ดังนั้น รากที่สองของ 900 คือ 30 และ -30

การเปรียบเทียบจำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์ที่สอง



จากรูปน้อง ๆ จะเห็นว่าพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่เล็กกว่าอีกรูปหนึ่ง จะมีความยาวด้านของรูปที่มีพื้นที่เล็กกว่าก็จะสั้นกว่าอีกรูปหนึ่งไปด้วย ดังนั้น ถ้าเราเทียบพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งได้ว่า $a < b$ ก็จะสรุปความสัมพันธ์ของความยาวด้านทั้งสองรูปได้ว่า $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ ด้วย

SmartMathPro

สมบัติ

กำหนดให้ $a > 0,\ b > 0$

- ถ้า $a < b$ แล้ว $\sqrt{a} < \sqrt{b}$
- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$
- $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

ตัวอย่างที่ 4 $\sqrt{10}$ และ $\sqrt{9.5}$ จำนวนใดมีค่ามากกว่ากัน

วิธีทำ จากสมบัติ ถ้า $a > 0,\ b > 0$ และ $a < b$ แล้ว $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

และ $10 > 9.5$

ดังนั้น $\sqrt{10}$ **มีค่ามากกว่า** $\sqrt{9.5}$

รากที่สาม

ความหมายของรากที่สาม

รากที่สามของจำนวนจริงใด ๆ จะมีบทนิยามดังนี้

บทนิยาม

ให้ a แทนจำนวนจริงใด ๆ รากที่สาม (cube root) ของ a คือ จำนวนจริงที่ยกกำลังสามแล้วได้ a เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sqrt[3]{a}$

หมายเหตุ : $\sqrt[3]{a}$ อ่านว่า กรณฑ์ที่สามของ a

เราสามารถหารากที่สามของจำนวนจริงบวกใด ๆ โดยใช้บทนิยามได้ดังนี้

- 2 เป็นรากที่สามของ 8 เพราะว่า $2^3 = 8$
- -2 เป็นรากที่สามของ 8 เพราะว่า $(-2)^3 = 8$
- 3 เป็นรากที่สามของ 27 เพราะว่า $3^3 = 27$
- -3 เป็นรากที่สามของ 27 เพราะว่า $(-3)^3 = 27$

น้อง ๆ จะเห็นว่าเราสามารถหาค่าของรากที่สามหรือกรณฑ์ที่สามของ a ที่เป็นจำนวนจริงลบได้ และรากที่สามของจำนวนจริง a จะมีค่าเดียว และมีค่าเท่ากับกรณฑ์ที่สามของ a

SmartMathPro

การหารากที่สาม

เราสามารถหารากที่สามโดยใช้วิธีการแยกตัวประกอบได้ โดยใช้แนวคิดคล้ายกันกับการหารากที่สองเลยย

ตัวอย่างที่ 5 จงหารากที่สามของจำนวนต่อไปนี้

1) 216

วิธีทำ จาก $216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

$= (2 \times 3)^3$

$= 6^3$

ดังนั้น รากที่สามของ 216 คือ 6

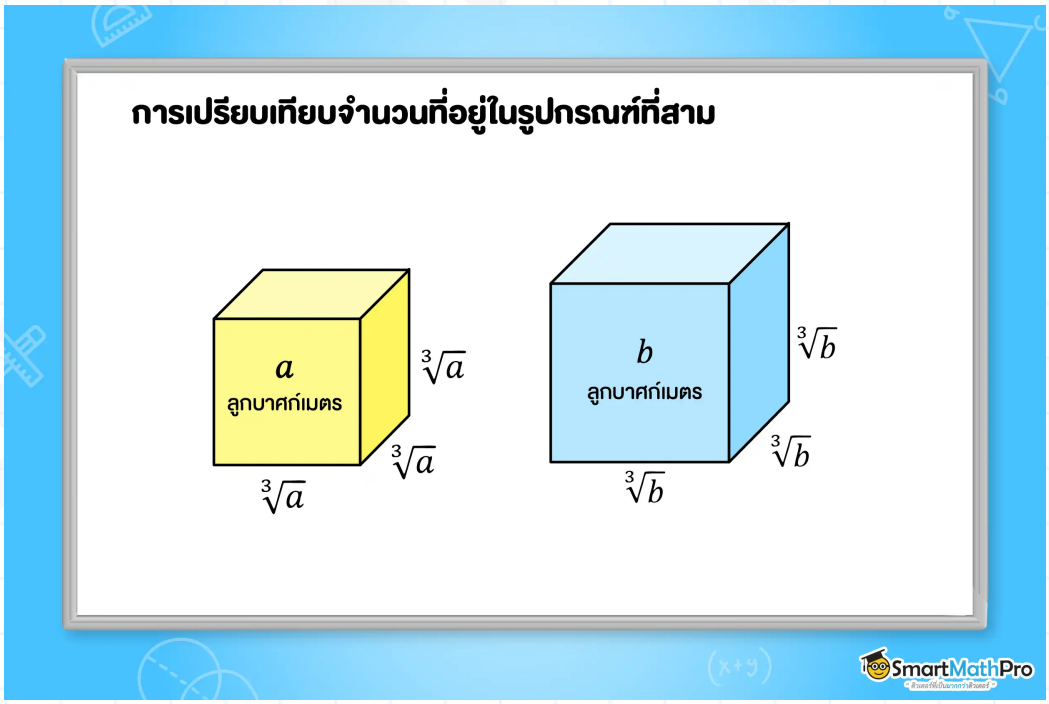
2) -343

วิธีทำ จาก $-343 = (-7) \times (-7) \times (-7)$

$= (-7)^3$

ดังนั้น รากที่สองของ -343 คือ -7

การเปรียบเทียบจำนวนที่อยู่ในรูปกรณฑ์ที่สาม



จากรูป ถ้าปริมาตรของลูกบาศก์น้อยกว่าอีกลูกบาศก์หนึ่ง แล้วความยาวด้านของลูกบาศก์ที่มีปริมาตรน้อยกว่าก็จะสั้นกว่าอีกลูกบาศก์หนึ่งไปด้วย ดังนั้น ถ้าเทียบปริมาตรของลูกบาศก์ซึ่งได้ว่า $a < b$ ก็จะจึงสรุปความสัมพันธ์ของความยาวด้านของลูกบาศก์ทั้งสองได้ว่า $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$ นั่นเอง

SmartMathPro

สมบัติ

กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง

- ถ้า $a < b$ แล้ว $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$
- $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$
- $\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$
- $(\sqrt[3]{a})^3 = a$
- $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

ตัวอย่างที่ 6 $\sqrt[3]{42}$ และ $\sqrt[3]{45}$ จำนวนใดมีค่าน้อยกว่ากัน

วิธีทำ จากสมบัติ ถ้า $a > 0, b > 0$ และ $a < b$ แล้ว $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$

และ $42 < 45$

ดังนั้น $\sqrt[3]{42}$ **มีค่าน้อยกว่า** $\sqrt[3]{45}$

"เวลาที่ดีที่สุดในการเริ่มต้น คือ **ตอนนี้**"

- พี่ปั้น SmartMathPro -

สนใจติวคณิตศาสตร์เพิ่มเติม online.smartmathpro.com