

การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง ม.2

การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง คืออะไร ?

น้อง ๆ หลายคนน่าจะเคยได้เรียนเรื่องการคูณพหุนามกันมาแล้ว ยังจำกันได้อยู่ไหมว่า ถ้าเรานำพหุนามดีกรีหนึ่ง 2 ตัว มาจับคูณกัน จะได้ผลคูณที่เป็นพหุนามดีกรีสอง แต่บทความนี้เราจะทำกระบวนการย้อนกลับ นั่นคือเราจะแยกพหุนามดีกรีสอง ให้กลับไปเป็นผลคูณของพหุนามดีกรีหนึ่ง 2 ตัว ซึ่งกระบวนการนี้เรียกว่า **“การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง”**

บทนี้ถือเป็นบทสำคัญมากเลย เพราะจะช่วยให้เราจัดรูปพหุนามได้ง่ายขึ้น ทำให้เราสามารถแก้สมการหรือวิเคราะห์คุณสมบัติต่าง ๆ สะดวกยิ่งขึ้น อีกทั้งยังเป็นพื้นฐานของบทอื่น ๆ ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น เช่น การแยกตัวประกอบพหุนามที่มีดีกรีสูงกว่าสอง, สมการกำลังสองตัวแปรเดียว และกราฟของฟังก์ชันกำลังสอง นอกจากนี้ยังเป็นพื้นฐานของความรู้ที่จะใช้ในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายด้วย

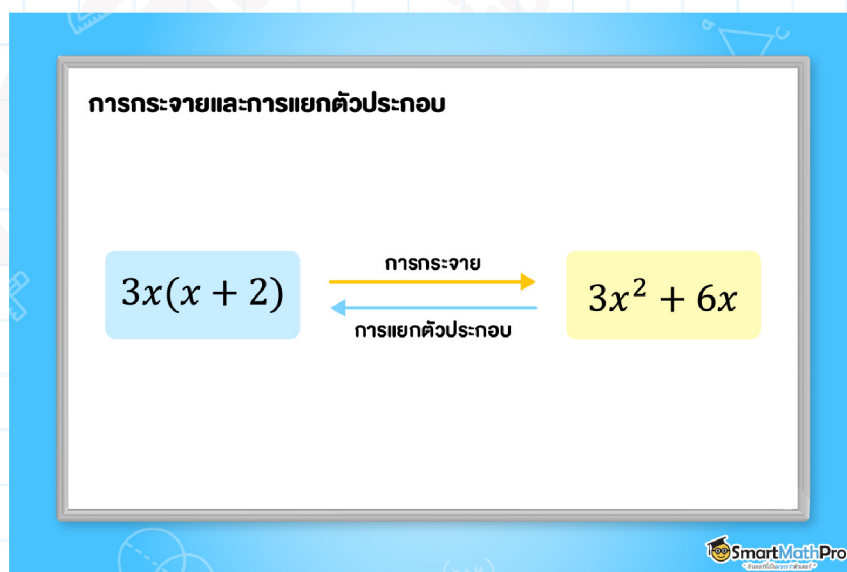
น้อง ๆ ลองพิจารณาผลคูณของพหุนาม $3x$ กับ $x + 2$

จะได้ว่า $3x(x + 2) = (3x)(x) + (3x)(2) = 3x^2 + 6x$

ในทางกลับกัน แสดงว่า $3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$

ดังนั้น พหุนาม $3x^2 + 6x$ จะแยกตัวประกอบได้เป็น $3x(x + 2)$

จากการกระจายพหุนามของตัวอย่างข้างต้น จะพบว่า การแยกตัวประกอบของพหุนามคือการทำขั้นตอนย้อนกลับของการคูณพหุนามนั่นเอง



โดยการแยกตัวประกอบของหัวข้อนี้ เราจะสนใจพหุนามดีกรีสองที่อยู่ในรูป $ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนเต็ม และ $a \neq 0$ เพื่อความสะดวกเราจะเรียก ax^2 ว่าพจน์หน้า เรียก bx ว่าพจน์กลาง และ เรียก c ว่าพจน์หลัง

วิธีการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองตัวแปรเดียว

ในหัวข้อนี้ พี่จะขอนำเสนอวิธีแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองทั้งหมด 5 รูปแบบ

รูปแบบที่ใช้สมบัติการแจกแจง

สมบัติการแจกแจง (การดึงตัวร่วม)

ให้ a , b และ c เป็นจำนวนใด ๆ

จะได้ว่า $ab + ac = a(b + c)$ หรือ $ba + ca = (b + c)a$

จากสมบัติข้างต้นเราจะเรียก a ว่า ตัวประกอบร่วม หรือเรียกสั้น ๆ ว่า ตัวร่วม นั่นเอง
เรามาศึกษาวิธีการแยกตัวประกอบของ $x^2 + 2x$ โดยใช้สมบัติการแจกแจงเพื่อทำความเข้าใจการใช้
สมบัตินี้กันดีกว่า

แนวคิดการแยกตัวประกอบของพหุนามโดยใช้สมบัติการแจกแจง

พิจารณาตัวประกอบร่วมของพหุนาม $x^2 + 2x$

$$\begin{array}{l} x^2 = x \times x \\ 2x = 2 \times x \end{array}$$

จะเห็นว่า ตัวประกอบร่วมของ x^2 และ $2x$ คือ x
จะได้ว่า

$$\begin{aligned} x^2 + 2x &= x(x) + x(2) \\ &= (x)(x + 2) \end{aligned}$$

ดังนั้น $x^2 + 2x = x(x + 2)$

SmartMathPro

ตัวอย่างที่ 1 จงแยกตัวประกอบของ $x^2 + 5x$

วิธีทำ จะสังเกตว่า ทั้งสองพจน์ที่โจทย์กำหนดมี x เป็นตัวร่วม

$$\text{ดังนั้น } x^2 + 5x = x(x) + 5(x) = x(x + 5)$$

ตัวอย่างที่ 2 จงแยกตัวประกอบของ $6y^2 - 4y$

วิธีทำ จะสังเกตว่า ทั้งสองพจน์ที่โจทย์กำหนดมี $2y$ เป็นตัวร่วม

$$\text{ดังนั้น } 6y^2 - 4y = 3y(2y) - 2(2y) = 2y(3y - 2)$$

รูปแบบ $ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a = 1$

ลองสังเกตผลคูณของพหุนาม $x + 3$ กับ $x + 4$

$$\begin{aligned}(x + 3)(x + 4) &= (x)(x) + (4)(x) + (3)(x) + (3)(4) \\ &= x^2 + 4x + 3x + 12 \\ &= x^2 + 7x + 12\end{aligned}$$

จะเห็นว่า

- พจน์หน้าของผลลัพธ์เกิดจากการคูณกันระหว่าง x กับ x
- พจน์กลางของผลลัพธ์เกิดจากการบวกกันระหว่าง 4 กับ 3 แล้วคูณด้วย x
- พจน์หลังของผลลัพธ์เกิดจากการคูณกันระหว่าง 4 กับ 3

แสดงว่า ถ้าจะแยกตัวประกอบของ $x^2 + 7x + 12$ เราจะต้องหาจำนวนใด ๆ สองจำนวนที่

- บวกกันได้ 7 และ
- คูณกันได้ 12

สรุปได้ว่า

เทคนิคการแยกตัวประกอบของพหุนาม $x^2 + bx + c$ ให้เป็นสองวงเล็บ

สำหรับพหุนามดีกรีสองในรูป $x^2 + bx + c$ เมื่อ b, c เป็นจำนวนเต็ม และ $c \neq 0$

ถ้า m และ n เป็นจำนวนเต็มสองจำนวน ซึ่ง $mn = c$ และ $m + n = b$

จะได้ว่า $x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$

เทคนิคการแยกตัวประกอบให้เป็นสองวงเล็บ

เราจะแยกตัวประกอบของ $x^2 - 4x + 3$ โดยใช้วิธีข้างต้นกัน
(ต้องหาจำนวนเต็ม 2 จำนวนที่ บวกกันได้ -4 และคูณกันได้ 3)

ผลบวก	ผลคูณ
$3 + 1 = 4$	$3 \times 1 = 3$
$3 + (-1) = 2$	$3 \times (-1) = -3$
$(-3) + 1 = -2$	$-3 \times 1 = -3$
$(-3) + (-1) = -4$	$(-3) \times (-1) = 3$



แสดงว่า $x^2 - 4x + 3 = x^2 + [(-3) + (-1)]x + (-3)(-1)$

ดังนั้น $x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$

ตัวอย่างที่ 3 จงแยกตัวประกอบของ $x^2 + x - 20$

วิธีทำ จากหลักการข้างต้น จะต้องหาจำนวน 2 จำนวนที่

- บวกกันได้ 1
- คูณกันได้ -20

เนื่องจาก $5 + (-4) = 1$ และ $5 \times (-4) = -20$

แสดงว่า $x^2 + x - 20 = x^2 + [(5) + (-4)]x + (5)(-4)$

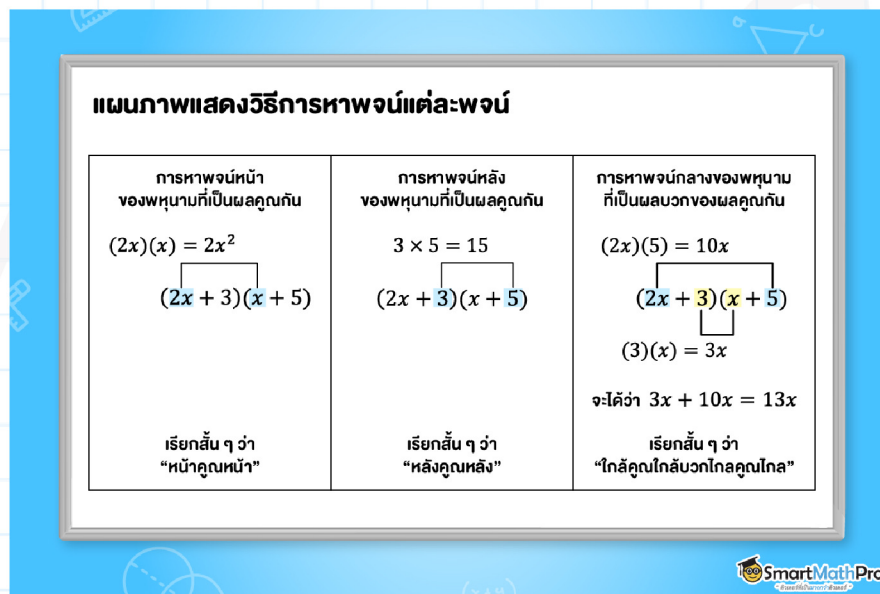
ดังนั้น $x^2 + x - 20 = (x + 5)(x - 4)$

รูปแบบ $ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a \neq 1$

ลองสังเกตผลคูณของพหุนาม $2x + 3$ กับ $x + 5$

$$\begin{aligned}(2x + 3)(x + 5) &= (2x + 3)(x) + (2x + 3)(5) \\&= (2x^2 + 3x) + (10x + 15) \\&= 2x^2 + 3x + 10x + 15 \\&= 2x^2 + 13x + 15\end{aligned}$$

ดังนั้น แยกตัวประกอบของ $2x^2 + 13x + 15$ ได้ดังนี้ $2x^2 + 13x + 15 = (2x + 3)(x + 5)$
จากผลคูณข้างต้น สามารถเขียนแผนภาพแสดงวิธีหาพจน์แต่ละพจน์ได้ดังนี้



ถ้าหาจำนวนตามเงื่อนไขทั้ง 3 ได้ ก็จะสามารถแยกตัวประกอบพหุนามที่อยู่ในรูป $ax^2 + bx + c$ ได้
เราลองมาดูตัวอย่างเพิ่มเติมกันเลย

ตัวอย่างที่ 4 จงแยกตัวประกอบของ $3x^2 - 7x + 2$

วิธีทำ จากหลักการข้างต้น จะต้องหาจำนวน 4 จำนวนที่

- หน้าคูณหน้า เท่ากับ 3
- หลังคูณหลัง เท่ากับ 2
- ไขว้คูณไขว้บวกไขว้คูณไขว้ เท่ากับ -7

เนื่องจาก $3 \times 1 = 3$, $(-1) \times (-2) = 2$ และ $(-1)(1) + (3)(-2) = (-1) + (-6) = -7$

แสดงว่า $3x^2 - 7x + 2 = (3)(1)x^2 + [(-1)(1) + (3)(-2)]x + (-1)(-2)$

ดังนั้น $3x^2 - 7x + 2 = (3x - 1)(x - 2)$

ตัวอย่างที่ 5 จงแยกตัวประกอบของ $-2x^2 - x + 3$

วิธีทำ สังเกตได้ว่าพหุนามตัวหน้ามีสัมประสิทธิ์ที่ติดลบ ดังนั้นเราจะทำการดึงตัวร่วม
นั้นก็คือ -1 ออกมาก่อน

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } -2x^2 - x + 3 &= (-1)(2x^2) + (-1)(x) + (-1)(-3) \\ &= (-1)(2x^2 + x - 3) \end{aligned}$$

แล้วนำ $2x^2 + x - 3$ มาแยกตัวประกอบด้วยวิธีข้างต้น

จากหลักการข้างต้น จะต้องหาจำนวน 4 จำนวนที่

- หน้าคูณหน้า เท่ากับ 2
- หลังคูณหลัง เท่ากับ -3
- คูณไขว้บวกคูณไขว้ลบ เท่ากับ 1

เนื่องจาก $2 \times 1 = 2$, $(3) \times (-1) = -3$ และ $(3)(1) + (2)(-1) = (3) + (-2) = 1$

แสดงว่า $2x^2 + x - 3 = (2)(1)x^2 + [(3)(1) + (2)(-1)]x + (3)(-1)$

ดังนั้น $-2x^2 - x + 3 = (2x + 3)(x - 1)$

รูปแบบการแยกด้วยกำลังสองสมบูรณ์

ลองสังเกตผลคูณของพหุนาม $(x + 3)^2$

$$\begin{aligned} (x + 3)^2 &= (x + 3)(x + 3) \\ &= (x + 3)(x) + (x + 3)(3) \\ &= x^2 + (x)(3) + (x)(3) + 3^2 \\ &= x^2 + (2)(x)(3) + 3^2 \end{aligned}$$

จาก $(x + 3)^2 = x^2 + (2)(x)(3) + 3^2$

ถ้า x เป็นพจน์หน้า และ 3 เป็นพจน์หลัง

จะเขียนความสัมพันธ์นี้ได้ว่า

$$(\text{พจน์หน้า} + \text{พจน์หลัง})^2 = (\text{พจน์หน้า})^2 + 2(\text{พจน์หน้า})(\text{พจน์หลัง}) + (\text{พจน์หลัง})^2$$

และเป็นแบบนี้กับเครื่องหมายลบด้วยเช่นกัน

จึงสรุปเป็นสูตรได้ดังนี้

สูตร กำลังสองสมบูรณ์

กำหนดให้ A แทนพจน์หน้า และ B แทนพจน์หลัง จะได้ว่า

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$$

$$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$$

ตัวอย่างที่ 6 จงแยกตัวประกอบของ $x^2 - 8x + 16$

วิธีทำ พิจารณา $x^2 - 8x + 16 = (x)^2 - 2(x)(4) + (4)^2$

แสดงว่า x เป็นพจน์หน้า และ 4 เป็นพจน์หลัง

จะได้ว่า $x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$

ตัวอย่างที่ 7 จงแยกตัวประกอบของ $4x^2 + 4x + 1$

วิธีทำ พิจารณา $4x^2 + 4x + 1 = (2x)^2 + 2(2x)(1) + (1)^2$

แสดงว่า $2x$ เป็นพจน์หน้า และ 1 เป็นพจน์หลัง

จะได้ว่า $4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$

รูปแบบการแยกด้วยผลต่างของกำลังสอง

ลองสังเกตผลคูณของพหุนาม $(x - 3)$ กับ $(x + 3)$

$$\begin{aligned}(x - 3)(x + 3) &= (x - 3)(x) + (x - 3)(3) \\ &= x^2 - (3)(x) + (3)(x) - (3)^2 \\ &= x^2 - 3^2\end{aligned}$$

จาก $(x - 3)(x + 3) = x^2 - 3^2$ หรือ $x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3)$

ถ้า x เป็นพจน์หน้า และ 3 เป็นพจน์หลัง

จะเขียนความสัมพันธ์นี้ได้ว่า

$$(\text{พจน์หน้า})^2 - (\text{พจน์หลัง})^2 = (\text{พจน์หน้า} - \text{พจน์หลัง})(\text{พจน์หน้า} + \text{พจน์หลัง})$$

จึงสรุปเป็นสูตรได้ดังนี้

สูตร ผลต่างของกำลังสอง

กำหนดให้ A แทนพจน์หน้า และ B แทนพจน์หลัง จะได้ว่า

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

ตัวอย่างที่ 8 จงแยกตัวประกอบของ $x^2 - 25$

วิธีทำ พิจารณา $x^2 - 25 = (x)^2 - (5)^2$

แสดงว่า x เป็นพจน์หน้า และ 5 เป็นพจน์หลัง

จะได้ว่า $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$

ตัวอย่างที่ 9 จงแยกตัวประกอบของ $16x^2 - 9$

วิธีทำ พิจารณา $16x^2 - 9 = (4x)^2 - (3)^2$

แสดงว่า $4x$ เป็นพจน์หน้า และ 3 เป็นพจน์หลัง

จะได้ว่า $16x^2 - 9 = (4x - 3)(4x + 3)$

รวมสูตรในการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสอง

สรุปสูตรการแยกตัวประกอบของพหุนาม

กำหนดให้ A แทนพจน์หน้า และ B แทนพจน์หลัง

• กำลังสองสมบูรณ์ $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$

$$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$$

• ผลต่างของกำลังสอง $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

“เวลาที่ดียิ่งที่สุดในการเริ่มต้น คือ ตอนนี้”

- พี่ปุ่น SmartMathPro -

สนใจติวคณิตศาสตร์เพิ่มเติม online.smartmathpro.com