

การแปลงทางเรขาคณิต ม.2

การแปลงทางเรขาคณิต คืออะไร ?

การแปลงในทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การเปลี่ยนแปลงของวัตถุโดยอาจมีการเปลี่ยนแปลงขนาด รูปร่าง หรือตำแหน่งของวัตถุ โดยการแปลงที่น้อย ๆ เคยเห็นในชีวิตประจำวันมีเยอะเลย เช่น การยึบบนบันไดเลื่อน ซึ่งตัวเราจะขยับเลื่อนขึ้นหรือลงไปตามบันได การมองภาพสะท้อน ของตัวเองในกระจกเงา การหมุนของเข็มนาฬิกา

หัวใจของการแปลงที่น้อย ๆ ควรรู้ คือจุดทุกจุดของรูปในตำแหน่งเดิม (หรือขนาดเดิม) จะต้องส่งไปยังรูปที่ตำแหน่งใหม่ (หรือขนาดใหม่) แบบจุดต่อจุด โดยในทางเรขาคณิตก็มีการแปลง ที่กล่าวถึงความเกี่ยวข้องกันระหว่างรูปเรขาคณิตเช่นกัน

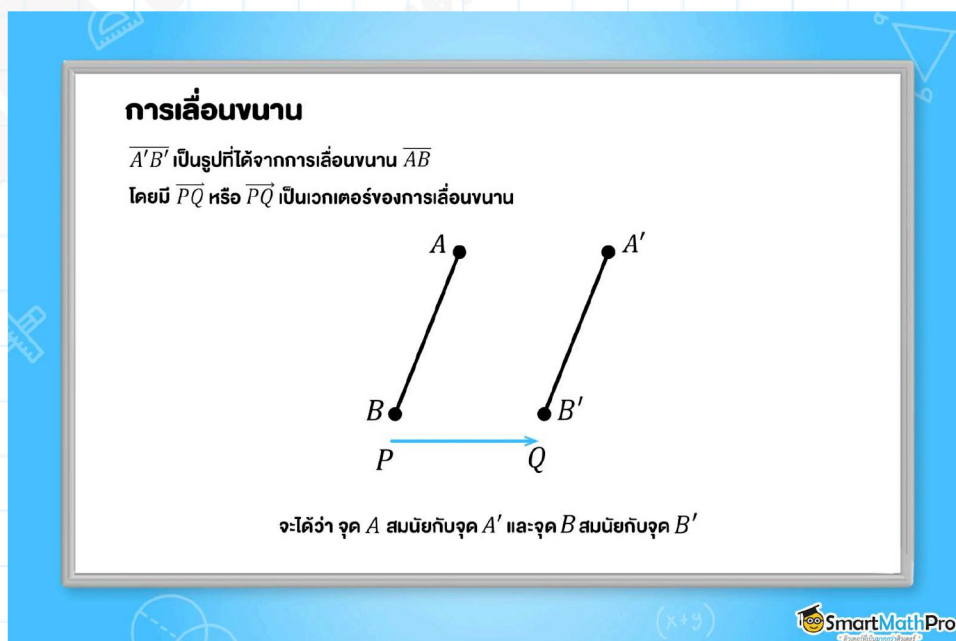
โดยเราจะเรียกรูปเรขาคณิตก่อนการแปลงว่า **รูปต้นแบบ (Pre - image)** เรียกรูปเรขาคณิต หลังการแปลงว่า **รูปที่ได้จากการแปลง (Image)** และเรียกการเปลี่ยนแปลงนั้นว่า **การแปลงทางเรขาคณิต (Geometric transformation)**

ซึ่งในบทนี้ จะพูดถึงการแปลงทางเรขาคณิตเพียง 3 แบบ คือ **การเลื่อนขนาน (Translation)**, **การสะท้อน (Reflection)** และ **การหมุน (Rotation)** เท่านั้น โดยการแปลงทั้ง 3 แบบนี้ จะทำให้รูปต้นแบบและรูปที่ได้จากการแปลงมีรูปร่างที่เหมือนกันและมีขนาดที่เท่ากันเสมอแน่นอน

การเลื่อนขนาน

การเลื่อนขนาน คืออะไร ?

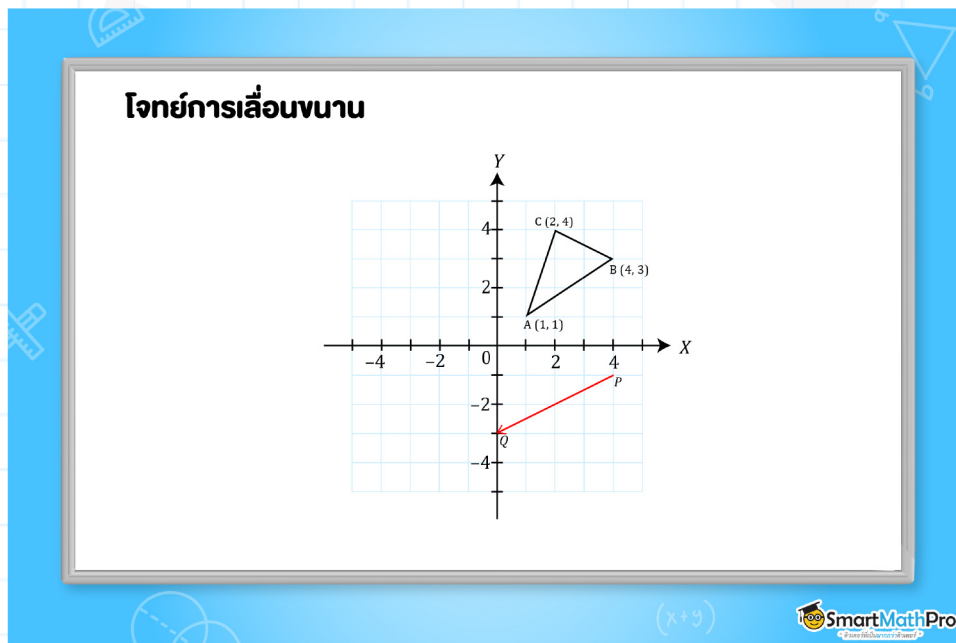
การเลื่อนขนานบนระนาบ เป็นการแปลงทางเรขาคณิตที่มีการเลื่อนจุดทุกจุดไปบนระนาบ ตามแนวเส้นตรงในทิศทางเดียวกัน และเป็นระยะทางเท่ากันตามที่กำหนด



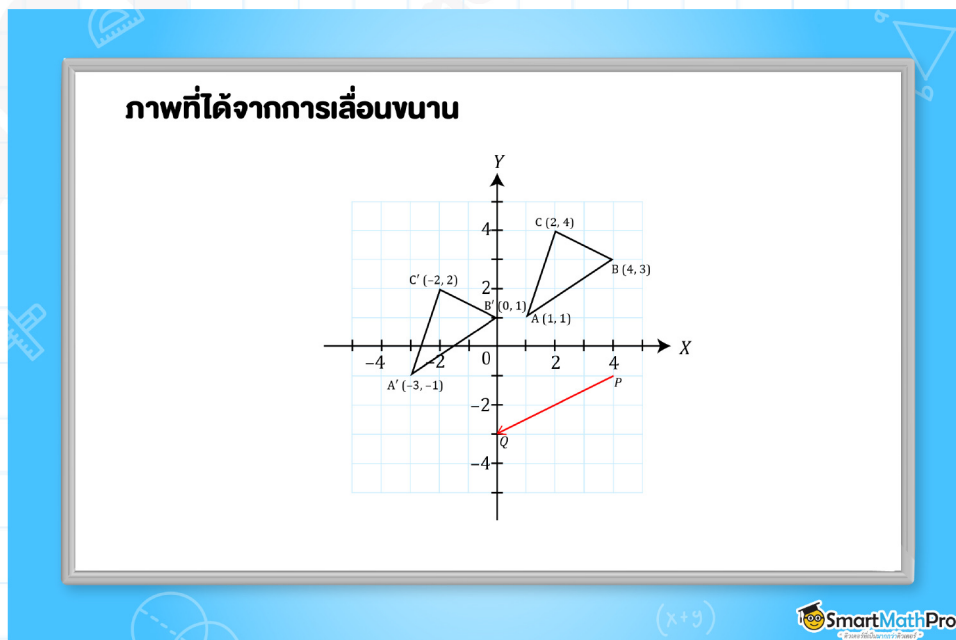
สมบัติของการเลื่อนขนาน

- รูปต้นแบบและรูปที่ได้จากการเลื่อนขนานสามารถทับกันได้สนิทโดยไม่ต้องพลิกรูป ซึ่งกล่าวได้ว่า รูปต้นแบบและรูปที่ได้จากการเลื่อนขนานเท่ากันทุกประการ
- ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดที่สมนัยกันแต่ละคู่ จะขนานกันและยาวเท่ากันทุกเส้น
- ส่วนของเส้นตรงบนรูปต้นแบบและรูปที่ได้จากการเลื่อนขนานส่วนของเส้นตรงนั้น จะขนานกันและยาวเท่ากัน

ตัวอย่างที่ 1 จงหาจุดยอดของ $\Delta A'B'C'$ ซึ่งเป็นรูปที่ได้จากการเลื่อนขนาน ΔABC ด้วย $\vec{PQ}$ ที่กำหนด



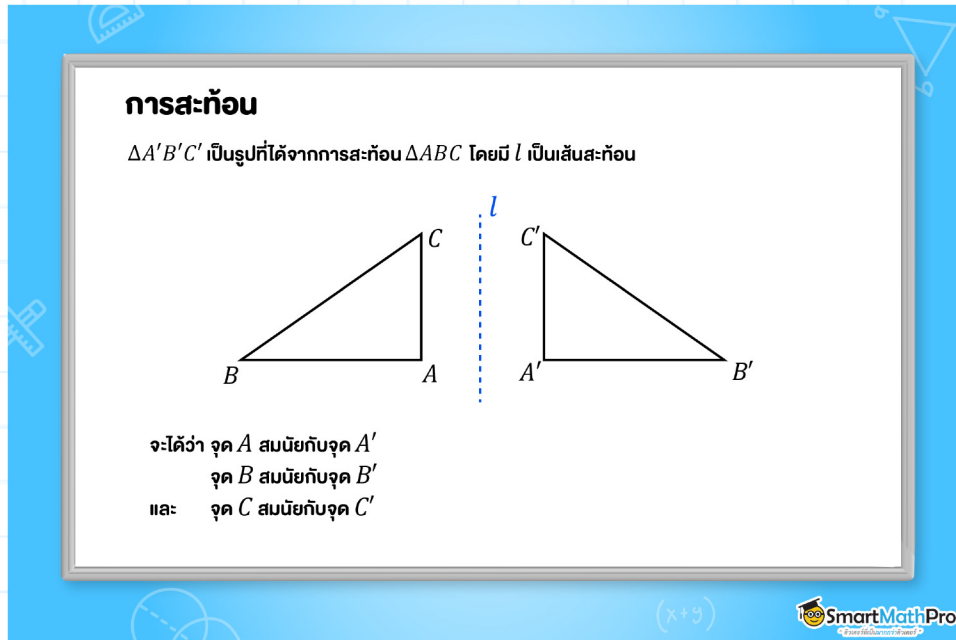
วิธีทำ ภาพที่ได้จากการเลื่อนขนานมีลักษณะดังนี้



การสะท้อน

การสะท้อน คืออะไร ?

การสะท้อนบนระนาบ เป็นการแปลงทางเรขาคณิตที่มีการพลิกรูป โดยจะมีเส้นตรงเส้นหนึ่งเป็น **เส้นสะท้อน (Line of reflection หรือ Mirror line)**



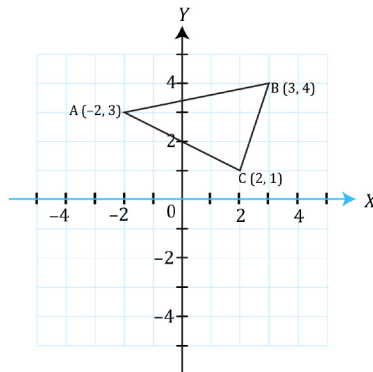
สมบัติของการสะท้อน

- รูปต้นแบบและรูปที่ได้จากการสะท้อน สามารถทับกันได้สนิทโดยต้องพลิกรูปต้นแบบ หรือพลิกรูปที่ได้จากการสะท้อนอย่างหนึ่งอย่างใด ซึ่งกล่าวได้ว่า รูปต้นแบบและรูปที่ได้จากการสะท้อนเท่ากันทุกประการ
- จุดที่สมนัยกันแต่ละคู่จะอยู่ห่างจากเส้นสะท้อนเท่ากัน หรือเส้นสะท้อนจะแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดที่สมนัยกันบนรูปต้นแบบ และรูปที่ได้จากการสะท้อน
- ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดที่สมนัยกันบนรูปต้นแบบและรูปที่ได้จากการสะท้อน ทุกเส้นจะขนานกัน



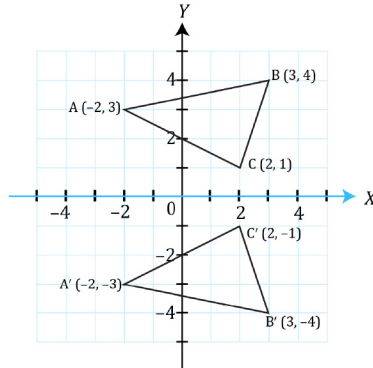
ตัวอย่างที่ 2 จงหาจุดยอดของ $\Delta A'B'C'$ ซึ่งเป็นรูปที่ได้จากการสะท้อน ΔABC ด้วยแกน X

โจทย์การสะท้อน



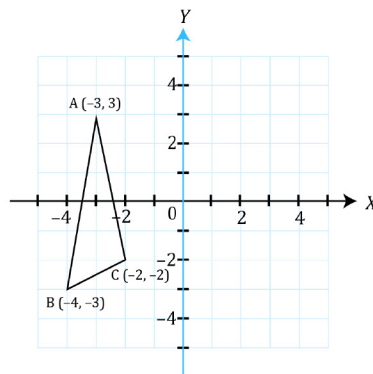
วิธีทำ ภาพที่ได้จากการสะท้อนมีลักษณะดังนี้

ภาพที่ได้จากการสะท้อน โดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน



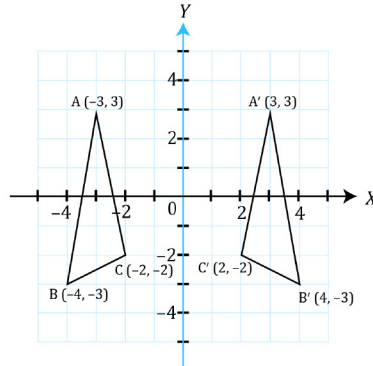
ตัวอย่างที่ 3 จงหาจุดยอดของ $\Delta A'B'C'$ ซึ่งเป็นรูปที่ได้จากการสะท้อน ΔABC ด้วยแกน Y

โจทย์การสะท้อน



วิธีทำ ภาพที่ได้จากการสะท้อนมีลักษณะดังนี้

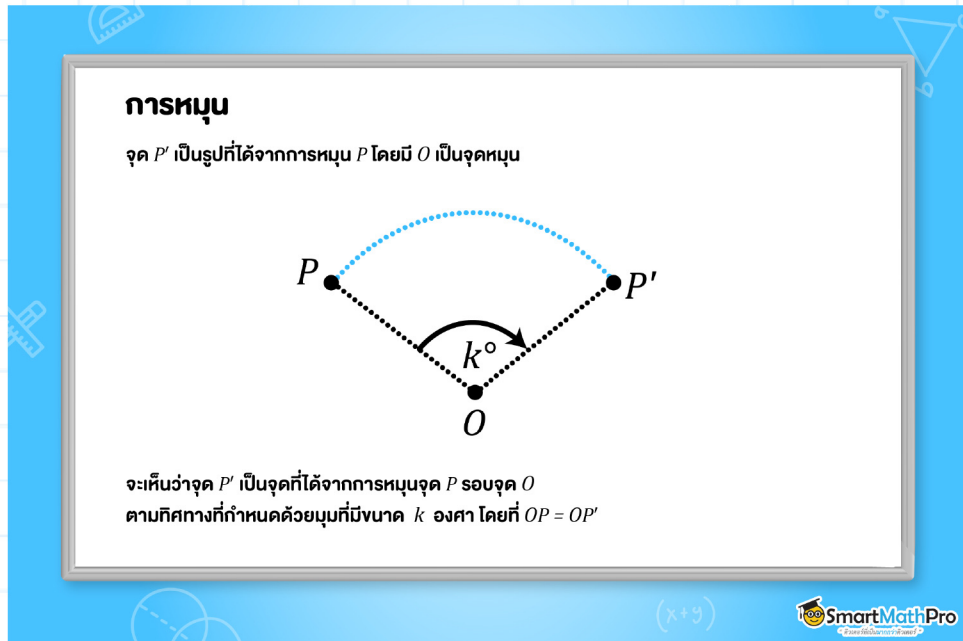
ภาพที่ได้จากการสะท้อน โดยมีแกน Y เป็นเส้นสะท้อน



การหมุน

การหมุน คืออะไร ?

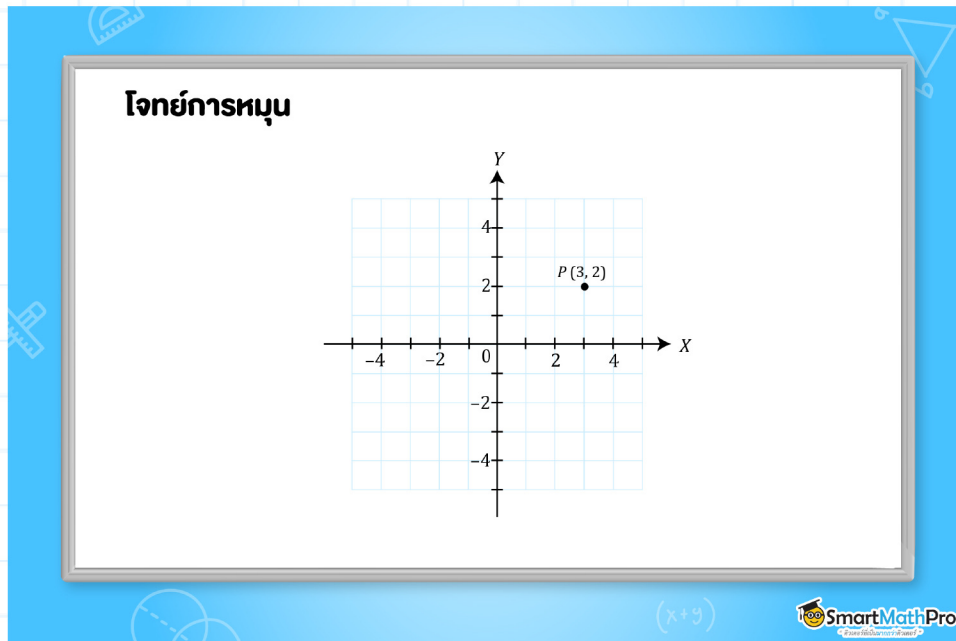
การหมุนบนระนาบ คือการแปลงทางเรขาคณิตที่มีจุด O เป็นจุดตรึง แล้วหมุนจุด P ไปบนระนาบ โดยจุด P' เป็นรูปที่ได้จากการหมุนจุด P รอบจุด O ตามทิศทางที่กำหนด และจะเรียกจุด P ว่า **จุดหมุน** หรือ **จุดศูนย์กลางของการหมุน (Centre of rotation)**



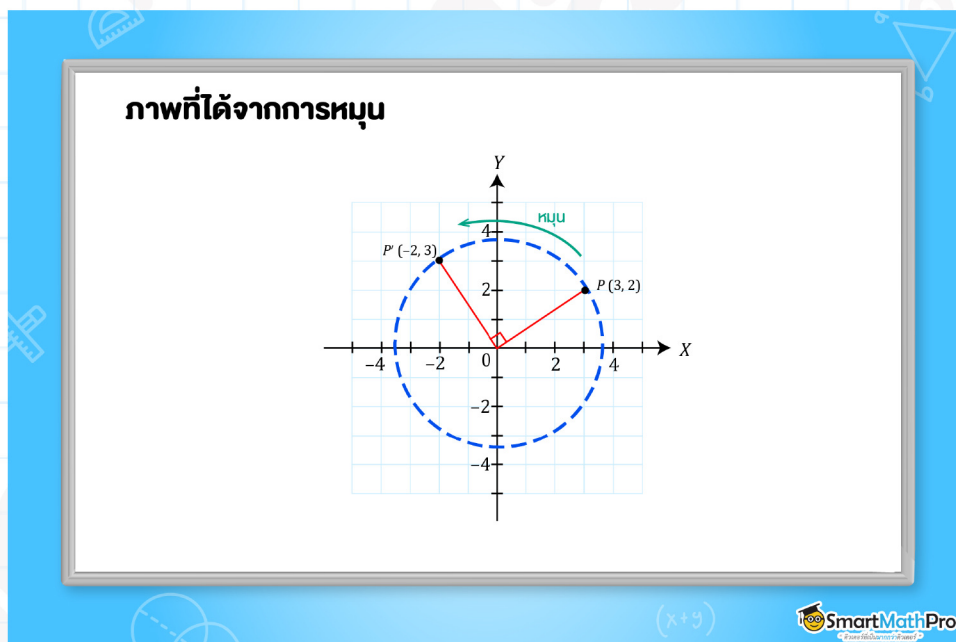
สมบัติของการหมุน

- รูปต้นแบบและรูปที่ได้จากการหมุน สามารถทับกันได้สนิทโดยไม่ต้องพลิกรูป ซึ่งกล่าวได้ว่ารูปต้นแบบและรูปที่ได้จากการหมุนเท่ากันทุกประการ
- จุดแต่ละจุดบนรูปต้นแบบและรูปที่ได้จากการหมุนจุดนั้น จะอยู่บนวงกลมเดียวกัน ที่มีจุดหมุนเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม แต่วงกลมทั้งหลายไม่จำเป็นต้องมีรัศมียาวเท่ากัน
- เส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดบนรูปต้นแบบ และรูปที่ได้จากการหมุนจุดนั้น จะผ่านจุดหมุนเสมอ

ตัวอย่างที่ 4 จงหาพิกัดของจุด P' ซึ่งเป็นจุดที่ได้จากการหมุนจุด P โดยมีจุด $(0, 0)$ เป็นจุดหมุน โดยหมุนทวนเข็มนาฬิกาด้วยมุม 90°



วิธีทำ จะได้ภาพที่ได้จากการหมุนมีลักษณะดังนี้



สรุปสูตรการแปลงทางเรขาคณิต

สรุปสูตรการแปลงทางเรขาคณิต

การหาพิกัดของจุดที่ได้จากการเลื่อนขนาน ไป x หน่วย

$$A(a, b) \xrightarrow{\text{เลื่อนขวา}} A'(a + x, b)$$

$$A(a, b) \xrightarrow{\text{เลื่อนซ้าย}} A'(a - x, b)$$

$$A(a, b) \xrightarrow{\text{เลื่อนขึ้นบน}} A'(a, b + x)$$

$$A(a, b) \xrightarrow{\text{เลื่อนลงล่าง}} A'(a, b - x)$$

การหาพิกัดของจุดที่ได้จากการสะท้อน โดยมีเส้นตรงต่อไปนี้เป็นเส้นสะท้อน

$$A(a, b) \xrightarrow{\text{แกน } X} A'(a, -b)$$

$$A(a, b) \xrightarrow{\text{แกน } Y} A'(-a, b)$$

$$A(a, b) \xrightarrow{y = x} A'(b, a)$$

$$A(a, b) \xrightarrow{y = -x} A'(-b, -a)$$

การหาพิกัดของจุดที่ได้จากการหมุน โดยมีจุดกำเนิดเป็นจุดหมุน

$$A(a, b) \xrightarrow{\text{ตามเข็มนาฬิกา } 90^\circ} A'(b, -a)$$

$$A(a, b) \xrightarrow{\text{ทวนเข็มนาฬิกา } 90^\circ} A'(-b, a)$$

$$A(a, b) \xrightarrow{\text{ตามเข็มนาฬิกา } 180^\circ} A'(-a, -b)$$

$$A(a, b) \xrightarrow{\text{ทวนเข็มนาฬิกา } 180^\circ} A'(-a, -b)$$

