

ความเท่ากันทุกประการ ม.2

ความเท่ากันทุกประการคืออะไร ?

ในชีวิตประจำวันของเรา เราจะเห็นสิ่งของหลาย ๆ อย่างที่มีรูปร่างเหมือนกัน เช่น ภาชนะใส่อาหาร หรืออาคารบางอาคารที่มีการออกแบบให้มีขนาดหรือรูปร่างที่เหมือนกัน

โครงสร้างที่ประกอบจากรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันของสิ่งก่อสร้างในสถานที่ต่าง ๆ ออกแบบเพื่อให้เกิดความแข็งแรง ซึ่งสิ่งของเหล่านั้นมักประกอบด้วยรูปเรขาคณิตในการออกแบบด้วย

ความเท่ากันทุกประการของรูปเรขาคณิต

ในทางคณิตศาสตร์ เมื่อสามารถเคลื่อนที่รูปเรขาคณิตรูปหนึ่งไปทับอีกรูปหนึ่งได้สนิท โดยใช้การแปลงทางเรขาคณิต จะกล่าวว่ารูปเรขาคณิตสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ ซึ่งเป็นไปตามบทนิยามของ**ความเท่ากันทุกประการ (Congruence)** ของรูปเรขาคณิตบนระนาบดังนี้

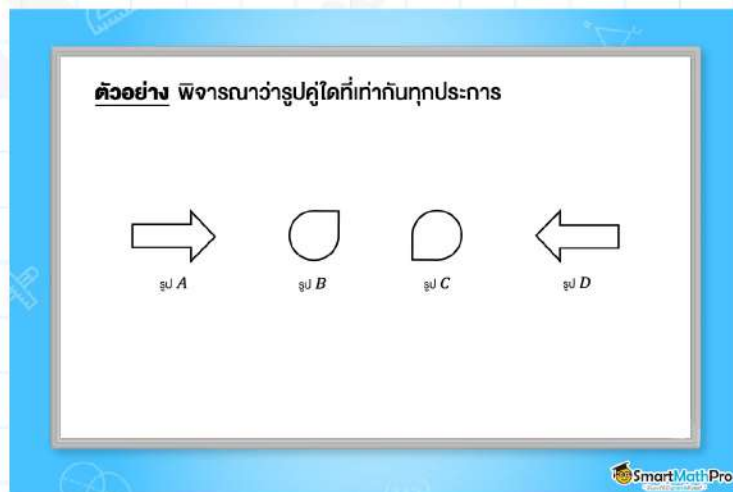


บทนิยาม

รูปเรขาคณิตสองรูปเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อ เคลื่อนที่รูปหนึ่งไปทับอีกรูปหนึ่งได้สนิท

จากบทนิยาม เราสามารถกล่าวได้ว่า “ถ้ารูปเรขาคณิตสองรูปเท่ากันทุกประการ แล้วจะเคลื่อนที่รูปหนึ่งไปทับอีกรูปหนึ่งได้สนิท” และ “ถ้าเคลื่อนที่รูปหนึ่งไปทับอีกรูปหนึ่งได้สนิท แล้วรูปเรขาคณิตสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ” ได้เช่นกัน เมื่อรูปเรขาคณิต A และรูปเรขาคณิต B เท่ากันทุกประการ จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ว่า **รูป $A \cong$ รูป B** อ่านว่า “รูป A เท่ากันทุกประการกับรูป B ” หรือ “รูป A และรูป B เท่ากันทุกประการ” ก็ได้เหมือนกันน้า

ตัวอย่างที่ 1



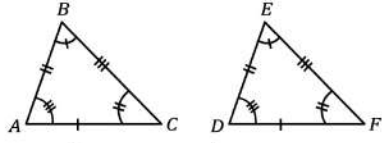
วิธีทำ จากรูปจะเห็นว่า รูป $A \cong$ รูป D และ รูป $B \cong$ รูป C เพราะสามารถใช้การแปลงทางเรขาคณิตทำให้รูป A กับรูป D และรูป B กับรูป C ทับกันสนิท

ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

รูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อด้านคู่ที่สมนัย และมุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นมีขนาดเท่ากันเป็นคู่ ๆ

ในการเขียนสัญลักษณ์แสดงรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ เรานิยมเขียนตัวอักษรเรียงตามลำดับของมุมคู่ที่สมนัยกันและด้านคู่ที่สมนัยกัน ดังรูป

ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม



จากรูป มุมคู่ที่สมนัยกับและด้านคู่ที่สมนัยกันมีขนาดเท่ากันดังนี้

$$\begin{array}{ll} \hat{A} \cong \hat{D} & AB = DE \\ \hat{B} \cong \hat{E} & \text{และ } BC = EF \\ \hat{C} \cong \hat{F} & CA = FD \end{array}$$

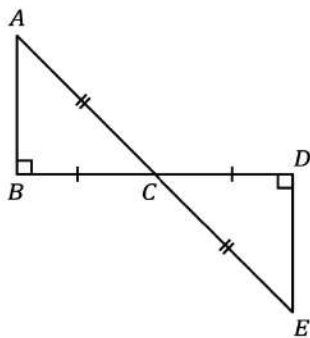
เขียนสัญลักษณ์แสดงความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองได้ดังนี้

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

SmartMathPro

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $\triangle ABC \cong \triangle EDC$ จงเขียนด้านคู่ที่สมนัยกันและมุมคู่ที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมคู่นี้

$\triangle ABC \cong \triangle EDC$



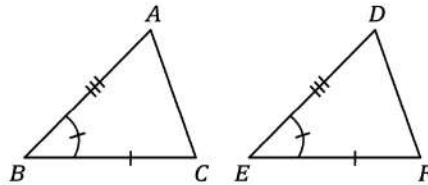
SmartMathPro

วิธีทำ จากรูป ด้านคู่ที่สมนัยกัน คือ $\overline{BC}$ กับ $\overline{DC}$, $\overline{CA}$ กับ $\overline{CE}$ และ $\overline{AB}$ กับ $\overline{ED}$
มุมคู่ที่สมนัยกัน คือ $\hat{ABC} = \hat{EDC}$, $\hat{BCA} = \hat{DCE}$ และ $\hat{CAB} = \hat{CED}$

ความสัมพันธ์แบบ ด้าน – มุม – ด้าน

ความสัมพันธ์แบบ ด้าน – มุม – ด้าน

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน (ด.ม.ด.)
กล่าวคือ มีด้านยาวเท่ากันสองคู่ และมุมระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากันมีขนาดเท่ากัน
แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ



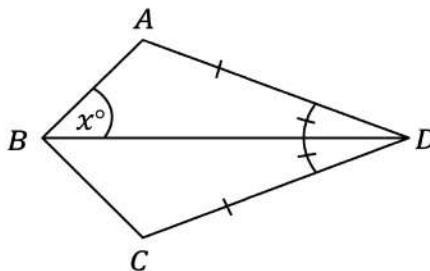
SmartMathPro



เราจะเห็นว่าด้านที่ยาวเท่ากันต้องอยู่ระหว่างมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ นั่นเอง เราลองไปทำความเข้าใจความสัมพันธ์นี้ผ่านตัวอย่างต่อไปนี้กัน

ตัวอย่างที่ 3 จากรูป กำหนดให้ $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ ถ้า $\angle ABC = 88^\circ$ แล้วค่าของ x เท่ากับเท่าใด

$$\triangle ABD \cong \triangle CBD$$



SmartMathPro

วิธีทำ จากรูป $AD = DC$, $\angle ABD = \angle CBD$ และ $BD = BD$ (เป็นด้านร่วม)

ดังนั้น $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (ด้าน - มุม - ด้าน)

จะได้ว่า $\angle ABD = \angle CBD$ เนื่องจากเป็นมุมคู่ที่สมนัยกัน

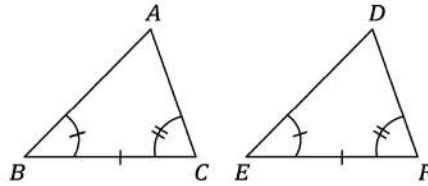
จาก $\angle ABC = 88^\circ$

ดังนั้น $x = \frac{88}{2} = 44$

ความสัมพันธ์แบบ มุม – ด้าน – มุม

ความสัมพันธ์แบบ มุม – ด้าน – มุม

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์แบบ มุม – ด้าน – มุม (ม.ด.ม.)
กล่าวคือ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ และด้านซึ่งเป็นแขนร่วมของมุมทั้งสองยาวเท่ากัน
แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ



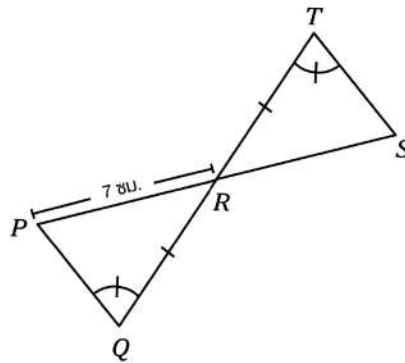
SmartMathPro



เราจะเห็นว่าด้านที่ยาวเท่ากันต้องอยู่ระหว่างมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่นั้นเอง เราลองไปทำความเข้าใจความสัมพันธ์นี้ผ่านตัวอย่างต่อไปนี้กัน

ตัวอย่างที่ 4 จากรูป กำหนดให้ $\triangle PQR \cong \triangle STR$ ถ้า $PR = 7$ เซนติเมตร แล้วจงหา RS

$$\triangle PQR \cong \triangle STR$$



SmartMathPro

วิธีทำ จากรูป $\hat{S}TR = \hat{P}QR$, $TR = QR$ และ $\hat{T}RS = \hat{Q}RP$ (เป็นมุมตรงข้าม)

ดังนั้น $\triangle PQR \cong \triangle STR$ (มุม - ด้าน - มุม)

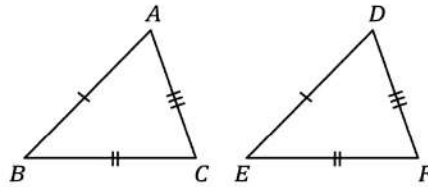
จะได้ว่า $PR = RS$ เนื่องจากเป็นด้านคู่ที่สมนัยกัน

ดังนั้น $RS = 7$ เซนติเมตร

ความสัมพันธ์แบบ ด้าน - ด้าน - ด้าน

ความสัมพันธ์แบบ ด้าน - ด้าน - ด้าน

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน - ด้าน - ด้าน (ด.ด.ด.)
กล่าวคือ มีด้านยาวเท่ากันสามคู่ แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

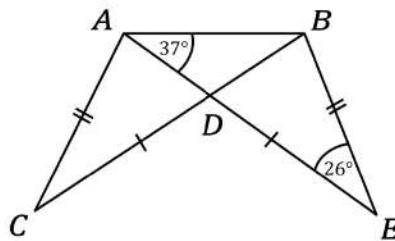


SmartMathPro

รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ จะมีความสัมพันธ์กันแบบ ด้าน - ด้าน - ด้าน แต่ไม่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม - มุม - มุม นี้ เพราะถึงแม้ขนาดของมุมทุกมุมเท่ากันเป็นคู่ ๆ แต่ความยาวด้านของแต่ละคู่อาจจะไม่เท่ากันก็ได้ ซึ่งจะทำให้รูปสามเหลี่ยมทั้งสองไม่เท่ากันทุกประการ แต่เราจะเรียกรูปสามเหลี่ยมคู่นั้นว่าสามเหลี่ยมคล้าย น้อง ๆ จะได้เรียนเรื่องนี้ต่อไปในระดับชั้น ม.3 เราลองไปทำความเข้าใจความสัมพันธ์แบบ ด้าน - ด้าน - ด้าน ผ่านตัวอย่างต่อไปนี้กัน

ตัวอย่างที่ 5 จากรูป กำหนดให้ $\triangle ABC \cong \triangle BAE$ จงหาขนาดของ $\hat{CAB}$

$$\triangle ABC \cong \triangle BAE$$



SmartMathPro

วิธีทำ จากรูป $AC = BE$, $BC = AE$ และ $AB = AB$ (เป็นด้านร่วม)

ดังนั้น $\triangle ABC \cong \triangle BAE$ (ด้าน - ด้าน - ด้าน)

จะได้ว่า $\hat{CAB} = \hat{EBA}$ เนื่องจากเป็นมุมคู่ที่สมนัยกัน

พิจารณา $\triangle BAE$ จากผลรวมของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ 180 องศา

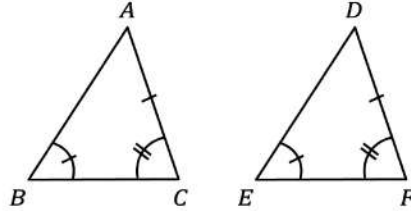
จะได้ $\hat{EBA} = 180 - 37 - 26 = 117$ องศา

ดังนั้น $\hat{CAB} = 117$ องศา

ความสัมพันธ์แบบ มุม - มุม - ด้าน

ความสัมพันธ์แบบ มุม - มุม - ด้าน

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ มุม - มุม - ด้าน (ม.ม.ด.)
กล่าวคือ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ และด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันยาวเท่ากันหนึ่งคู่
แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

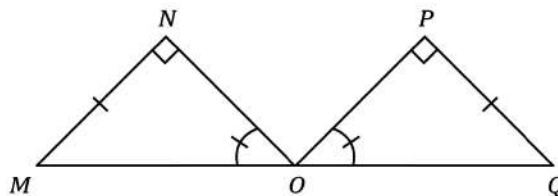


SmartMathPro

น้อง ๆ จะสังเกตได้ว่าความสัมพันธ์นี้ด้านคู่ที่เท่ากัน ต้องไม่อยู่ระหว่างมุมคู่สองมุม เพราะแบบนั้นจะเป็นความสัมพันธ์แบบ มุม - ด้าน - มุม ไม่ใช่ มุม - มุม - ด้าน นั้นเอง เราลองทำความเข้าใจความสัมพันธ์ผ่านตัวอย่างต่อไปนี้กัน

ตัวอย่างที่ 6 จากรูป กำหนดให้ $\triangle MNO \cong \triangle QPO$ ถ้า $MN = 4$ เซนติเมตร และ $NO = 3$ เซนติเมตร จงหาความยาวของส่วนของเส้นตรง MQ

$$\triangle MNO \cong \triangle QPO$$



SmartMathPro

วิธีทำ จาก $\triangle MNO$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
สามารถใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสเพื่อหาความยาวของ MO ได้
จะได้ว่า $MO^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$
 $MO = 5$ เนื่องจาก MO เป็นความยาวด้าน ดังนั้น $MO = 5$ เซนติเมตร
จาก $\triangle MNO \cong \triangle QPO$ (มุม - มุม - ด้าน)
จะได้ว่า $MO = QO$ เนื่องจากเป็นด้านคู่ที่สมนัยกัน
ดังนั้น $QO = 5$ เซนติเมตร
ดังนั้น $MQ = 5 + 5 = 10$ เซนติเมตร

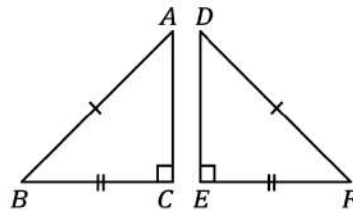
ความสัมพันธ์แบบ ฉาก - ด้าน - ด้าน

ความสัมพันธ์แบบ ฉาก - ด้าน - ด้าน

ถ้ารูปสามเหลี่ยมฉากสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ ฉาก - ด้าน - ด้าน (ฉ.ด.ด.)

กล่าวคือ มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากัน และมีด้านอื่นอีกหนึ่งคู่ยาวเท่ากัน

แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

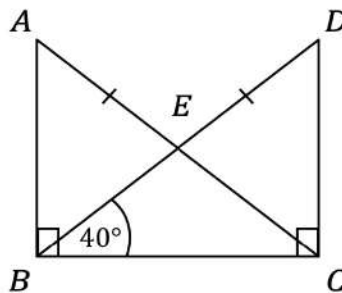


SmartMathPro

น้อง ๆ จะสังเกตได้ว่าความสัมพันธ์นี้ด้านคู่ที่เท่ากัน ต้องไม่เป็นแขนของมุมฉากทั้งสองด้าน เพราะแบบนี้จะเป็นความสัมพันธ์แบบ ด้าน - มุม (ฉาก) - ด้าน ไม่ใช่ ฉาก - ด้าน - ด้าน นั่นเอง เราลองทำความเข้าใจความสัมพันธ์ผ่านตัวอย่างต่อไปนี้กัน

ตัวอย่างที่ 7 จากรูป กำหนดให้ $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ จงหาขนาดของมุม BEC

$$\triangle ABC \cong \triangle DCB$$



SmartMathPro

วิธีทำ จากรูป $\hat{A}BC = \hat{D}CB = 90^\circ$, $AC = DB$ และ $BC = BC$ (เป็นด้านร่วม)

ดังนั้น $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ (ฉาก - ด้าน - ด้าน)

จะได้ว่า $\hat{A}CB = \hat{D}BC$ เนื่องจากเป็นมุมคู่ที่สมนัยกัน

ดังนั้น $\hat{D}BC = 40^\circ = \hat{A}CB$

พิจารณา $\triangle BEC$

นั่นคือ $\hat{B}EC = 180 - 40 - 40 = 100$ องศา



การนำความเท่ากันทุกประการไปใช้

ในบทนี้ เราจะนำความรู้เรื่องความเท่ากันทุกประการไปประยุกต์ใช้กับรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยบทนิยามของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว คือ

บทนิยาม

รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (Isosceles triangle) คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านสองด้านยาวเท่ากัน

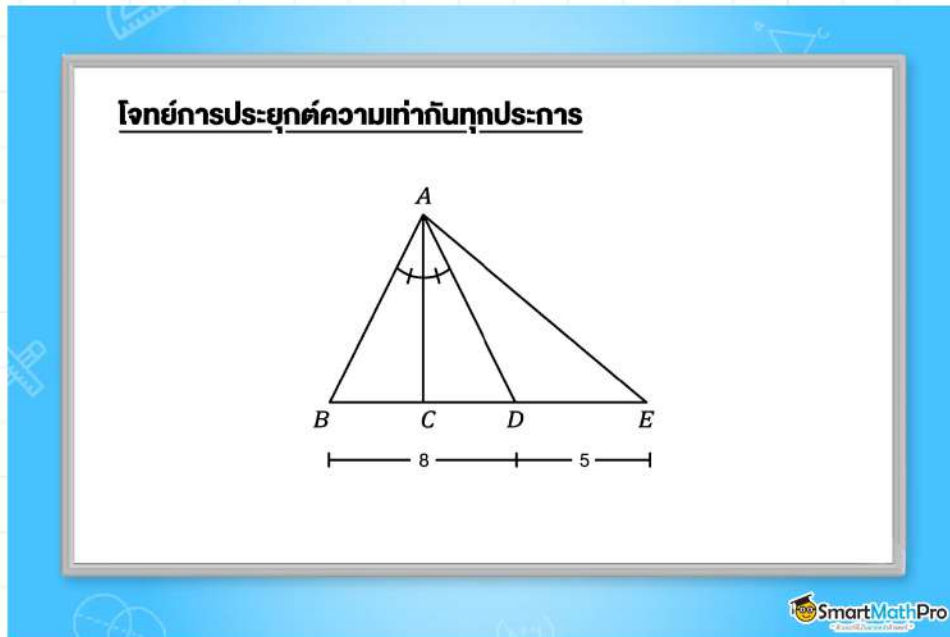
สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่จะได้เรียนในบทนี้มีทั้งหมด 5 ข้อ ดังนี้

1. เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จะแบ่งรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วออกเป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ
2. มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีขนาดเท่ากัน
3. เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จะแบ่งครึ่งฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และจะตั้งฉากกับฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
4. เส้นที่ลากจากมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมาแบ่งครึ่งฐาน จะแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และจะตั้งฉากกับฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
5. เส้นที่ลากจากมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมาตั้งฉากกับฐาน จะแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และจะแบ่งครึ่งฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

เราสามารถนำสมบัติด้านบนนี้ไปใช้เพื่ออ้างอิงในการแก้โจทย์ต่าง ๆ ได้ เพื่อให้เข้าใจมากขึ้น ลองไปใช้สมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วผ่านโจทย์ต่อไปนี้กัน



ตัวอย่างที่ 8 จากรูป กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม ABD เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
ถ้า $AC = 10$ เซนติเมตร แล้วพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ACE เท่ากับเท่าใด



วิธีทำ จากรูป AC เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABD
ซึ่งจะแบ่งครึ่งฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และจะตั้งฉากกับฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
จะได้ว่า $AC \perp BD$

จาก $BD = 8$ เซนติเมตร

จะได้ $BC = CD = 4$ เซนติเมตร

ดังนั้น $CE = 4 + 5 = 9$ เซนติเมตร

จาก $AC \perp BD$ และ B, C, D, E เป็นจุดบนเส้นตรงเดียวกัน

จะได้ว่า $AC \perp CE$

ดังนั้น พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม $ACE = \frac{1}{2} \times CE \times AC$
$$= \frac{1}{2} \times 9 \times 10 = 45 \text{ ตารางเซนติเมตร}$$